

§1 ベクトル束のモジュライ空間

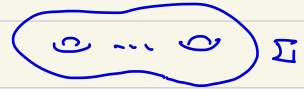
§2, Hitchin 系 & スペクトル曲線.

§3, 非可換ホジ理論

/C

§2

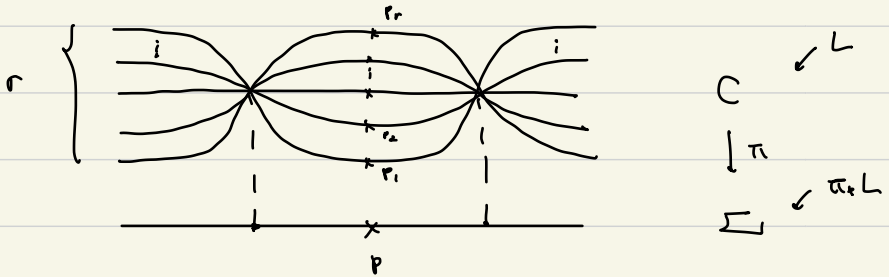
Σ : コンパクトで非特異な代数曲線, $g(\Sigma) = g$
($g=2$ 面).



「ベクトル束のモジュライ空間」の導入として.

直線束の順像で表された Σ 上のベクトル束を考える:

$\pi : C \rightarrow \Sigma$; 分岐 r 重被覆

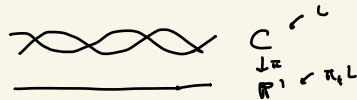


このとき, $L \in \text{Pic}(C)$ (つまり C 上の直線束) は

Σ 上の rank r のベクトル束 $E = \pi_* L$ を定める.

($p \notin \{\text{分岐点}\}$ ならば $E_p \simeq \bigoplus_{i=1}^r L_p$, $\pi^{-1}(p) = \{p_1, \dots, p_r\}$.)

[跳躍現象]



例)

$\pi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$; 分岐 2 重被覆 , $g(C) > 0$.

とす $\pi(L) = 0$ (\Rightarrow 例. $\deg(L) = g-1$) とす.

Riemann-Roch と $\deg(\pi_* L) = -2$.

よって $l := h^0(C, L) = h^0(\mathbb{P}^1, \pi_* L)$ である.

$$\pi_* L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(l-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-l-1).$$

$L \in \text{Pic}^{g-1}(C)$ は連続的に変化する族が存在する

$\rightarrow \pi_* L$ は連続的に変化する (はず).

$(\mathbb{H} \in \mathbb{H}) \subset \text{Pic}^{g-1}(C)$
 $\rightarrow h^0(C, L) = 1$ ($\Leftrightarrow h^1(C, L) = 1$)

ここで $\text{Pic}^{g-1}(C)$ の 1-パラメータ族 \mathbb{H} とす.

$$\left\{ \begin{array}{l} L_t \notin \mathbb{H} \quad (t \neq 0) \\ L_0 \in \mathbb{H} \quad (t = 0) \end{array} \right.$$

とす ($1 \rightarrow X$ -族 $\{L_t\}$) とす.

このとき

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_* L_t \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \quad (t \neq 0) \\ \pi_* L_0 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \quad (t = 0) \end{array} \right.$$

このように状況を「跳躍現象」とす.

Jumping phenomenon.

このような族も含めてベクトル束をパラメトライズする空間
空間 (モジュライ空間) を考えようとする。都合が悪い空間が多い。
(ハウストロフでない、悪い)

→ 「良い」幾何学的性質を持った空間を得るには、
ベクトル束を 取捨選択 しないといけない。
(半)安定ベクトル束)

Def

$E : \Sigma \rightarrow$ ベクトル束.

E に対し. slope $\mu(E)$ を

$$\mu(E) := \frac{\deg(E)}{\text{rank}(E)}$$

で定める。また、その (非自明な) 部分束

$0 \neq F \neq E$ に対し.

$$\mu(F) \leq \mu(E)$$

が成り立つとき、 E は (半)安定 である。という

Thm (Mumford, Seshadri)

以下の性質を満足する Σ 上のベクトル束のモジュライ空間 $\mathcal{U}_E^s(r, d) \subset \mathcal{U}_E^{ss}(r, d)$ が存在する.

(1) $\mathcal{U}_E^s(r, d)$ は滑らかな代数的様体で、その各点は $\text{rk} = r, \text{deg} = d$ の安定ベクトル束の同型類に対応する。
特に、 $\mathcal{U}_E^s(r, d)$ は $\mathcal{U}_E^{ss}(r, d)$ の開集合.

(2) $\mathcal{U}_E^{ss}(r, d)$ は射影的代数的様体で、その各点は $\text{rk} = r, \text{deg} = d$ の半安定ベクトル束の同型類に対応する.

(3) $\mathcal{U}_E^s(r, d), \mathcal{U}_E^{ss}(r, d)$ はともに粗モジュライ (Coarse moduli)

Rem (Moduli Problems / Moduli Functors)

次のような (反復) 関手 を考へる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(-) : \mathcal{Gch}^n & \longrightarrow & \mathcal{G}et \\ \downarrow \mathcal{N} & \longmapsto & \downarrow \mathcal{F}(\mathcal{N}) \end{array}$$

s.t. $\mathcal{F}(\mathcal{N}) = \{ \mathcal{N} \text{ によるパラメータ化された同値類の族} \}$.

$$\left(\begin{array}{l} \mathcal{G}ch : \text{スキームの族} \\ \mathcal{G}et : \text{集合の族} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \text{cf.} & [E_1] & [E_2] & \in \mathcal{F}(N) \quad (= \text{vec. bds } / \sim) \\ & \downarrow & \downarrow & \\ & \circlearrowleft \begin{array}{cc} x_{r_1} & x_{s_1} \end{array} & & N \quad (= \mathcal{U}_G^S(r, d)) \end{array} \right)$$

このとき、 $\mathcal{F}(-)$ を表現群組 (M, Φ) のとき、 $\mathcal{F}(-)$ の 精密モジュライ (fine moduli) と言う。

$$\left(\begin{array}{l} \text{自然同値} \\ \Phi: \mathcal{F}(-) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(-, M) \end{array} \right)$$

また、次の条件を満たす空間 M を $\mathcal{F}(-)$ の 粗モジュライ (Coarse moduli) と言う。

- (i) 自然変換 $\Phi: \mathcal{F}(-) \rightarrow \text{Hom}(-, M)$ が存在。
- (ii) $\Phi(\text{points}): \mathcal{F}(\text{pts}) \rightarrow \text{Hom}(\text{pts}, M)$ が全単射。
- (iii) Φ は次の普遍性を満たす:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(-) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Hom}(-, M) \\ & \searrow \psi & \downarrow \exists! \Omega \\ & & \text{Hom}(-, N) \end{array}$$

変形理論 4.5 次の Lem が従う:

Lemma

$\delta(\Sigma) \geq 2$ とおき, $\mathcal{U}^{ss} := \mathcal{U}_{\Sigma}^{ss}(r,d)$, $\mathcal{U}^s := \mathcal{U}_{\Sigma}^s(r,d)$ とおく.

(1) $\dim \mathcal{U}^{ss} = 1 + r(\delta-1)$, \mathcal{U}^s は \mathcal{U}^{ss} の open dense subscheme

(2) 安定ベクトル束は単純 (simple)

$$(\rightarrow \#) \quad H^0(\Sigma, \text{End}(E)) = \mathbb{C}$$

(3) 安定ベクトル束の同型類に対応する \mathcal{U}^{ss} の点は一非特異

(4) $T_{\mathbb{C}[E]} \mathcal{U}^s \simeq H^1(\Sigma, \text{End}(E))$ ↗ Serre dual

$$T_{\mathbb{C}[E]}^{\dagger} \mathcal{U}^s \simeq H^0(\Sigma, \text{End}(E) \otimes \Omega_{\Sigma}^1)$$

§2 Hitchin系 & スベクトル曲線

Def (ACIHNS)

(M, ω) : 滑らかなシンプレクティック代数的多様体.

B : 滑らかな代数的多様体.

平坦射 $H: M \rightarrow B$ は、次の条件を満たすこと.

代数的完全可積分系 (algebraically completely integrable

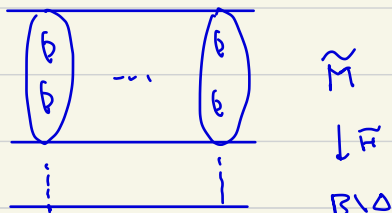
Hamiltonian system) とは:

$$M \hookrightarrow \exists \widetilde{M} : M \text{ の } \mathbb{C}^{\times}\text{-作用化}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \widetilde{M} \\ & \simeq & \swarrow \widetilde{H} \\ H & \searrow & B \end{array}$$

M のコンパクト化 \tilde{M} と平坦射 $\tilde{H}: \tilde{M} \rightarrow B$ が存在し、
上の図式が可換であり、

B のある固有な閉部分的な補集合 $B \setminus \Delta$ 上で、
 \tilde{H} はファイバーが アベル的群構造に同型である かつ
ラグランジアンファイバー束 である。 (複素トーラス)



Thm (Hitchin)

(ACZHS)

$T^*U_{\Sigma}^s$ 上には自然に代数的完全可積分系の構造が入る。

この可積分系を Hitchin 可積分系 に対して Hitchin 系 とし、

$T^*U_{\Sigma}^s$ の全空間は次のお母組 (E, φ) の対空間:

(1) E は Σ 上の $h(E) = r$, $\deg(E) = d$ の
安定ベクトル束。

(2) $\varphi \in H^1(\Sigma, \text{End}(E))^* \simeq H^0(\Sigma, \text{End}(E) \otimes \Omega_{\Sigma}^1)$

すなわち 1-form の値を持つ E の自己準同型写像

$$\varphi: E \rightarrow E \otimes \Omega_{\Sigma}^1$$

このお母組 (E, φ) を Higgs 束 とす。

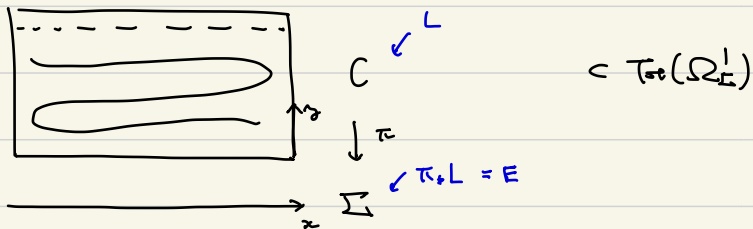
Hitchin 系のハミルトニアン \mathcal{H} は、次のように φ の特性多項式の係数を対応させた形で得られる。

$$H : \begin{array}{ccc} T^* \mathcal{U}_E & \longrightarrow & \mathcal{B}_\omega := \bigoplus_{i=0}^r H^0(\Sigma, \Omega_E^{\otimes i}) \\ \omega & & \omega \\ (E, \varphi) & \longmapsto & P := [b_0, \dots, b_r] \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(\varphi, \gamma) &= \det(\varphi - \gamma \text{Id}) \\ &= \gamma^r - \text{tr}(\varphi) \gamma^{r-1} + \dots + (-1)^r \det(\varphi) \\ &= \sum_{i=0}^r b_i \cdot \gamma^{r-i} \end{aligned}$$

$$b_i := (-1)^i \text{tr}(\wedge^i \varphi) \in H^0(\Sigma, \Omega_E^{\otimes i}), \quad b_0 = 1.$$

$$C := \{ P(\varphi, \gamma) = 0 \} \subset \text{Tot}(\Omega_E^1) \quad \text{存在.}$$



このように曲線 $C \subset \text{Tot}(\Omega_E^1)$ は スペクトル曲線 (Spectral curve) である。

($\pi : C \rightarrow \Sigma \rightarrow \mathbb{R}P^1$ は φ_x の固有値に対応 ($\varphi_x : E_x \rightarrow E_x \otimes \Omega_x^1$))

Prop (BNR Correspondence)

C を複素の 1 次元滑らかなコンパクト Riemann 曲線とする。このとき

① $\{ (E, \varphi) \text{ は Riemann 曲線 } C \text{ の } \mathcal{O}_C \text{ の } \} / \sim$

② $\{ C \text{ 上の直線束 } L \} / \sim$

の間に全単射が存在する

($L_{(2,1)}$ は φ_2 の固有ベクトルに対応する)

$$\begin{array}{ccc}
 H : T^* \mathcal{U}_E^S & \longrightarrow & \mathcal{B}_\omega \\
 \cup & & \cup \\
 H^1(E) & \longrightarrow & \{ \mathcal{P} \}
 \end{array}$$

$$H^1(E) \subset_{\text{open}} \text{Pic}^{\delta}(C), \quad \delta = d + r(1-g_C) + g_C - 1$$

" $\{ L \mid C \text{ 上の } \deg(L) = \delta \text{ の直線束} \}$ "

7.1.11 - 2.12 $\text{Pic}^{\delta}(C)$ 全体を得るためには

安定性の定義を援ねる必要がある。

Def

組 (E, φ) は、おのづかの φ -不変部分束 F に対して
(つまり、 $0 \subsetneq F \subsetneq E$ かつ $\varphi(F) \subset F \otimes \Omega_C^1$ は部分束に対して)
$$\mu(F) \leq \mu(E)$$

が成り立つとき、(半)安定 Higgs 束 とう。

Thm (Hitchin, Simpson)

半安定 Higgs 束の同型類は、10次元の粗モジュライ
 $\text{Higgs}_E(r, d)$ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} T^* \mathcal{U}_E^S & \longleftrightarrow & \text{Higgs}_E(r, d) & \supset & \text{Pic}^d(C) \\ & \searrow H & \curvearrowright & \swarrow H & \\ & & B_\omega & \supset & \text{tPS} \end{array}$$

§3. 非可換ホッジ理論

上述の安定性、定義を考慮し意義 (の →) を与.

次の定理の秩序付け:

Thm

次の 2 つの モジュライ空間 \mathcal{M} には. (定角析的母)

微分同相写像 \exists 存在する.

$$\text{Higgs}_{\Sigma}(r, \rho) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}^{(\text{semi-simple})} (\pi_1(\Sigma), \text{GL}_r(\mathbb{C})) / \sim_{\text{GL}_r(\mathbb{C})}$$

$$A \sim B \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists Q \in \text{GL}_r(\mathbb{C}) \text{ st. } B = Q A Q^{-1}$$

Thm (Riemann-Hilbert Correspondence)

$\text{Conn}_{\Sigma}(r)$: Σ 上の 平坦接続の モジュライ空間.

$$\nabla: E \rightarrow E \otimes \Omega_{\Sigma}^1 \quad \text{st. } \nabla(fs) = d f \otimes s + f \nabla s.$$

このとき、次の 複素角析的母 同型射 \exists 存在する.

$$\text{Conn}_{\Sigma}(r) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}^{(\text{s.s.})} (\pi_1(\Sigma), \text{GL}_r(\mathbb{C})) / \sim$$

$$\begin{array}{ccc} \circ & & \circ \\ (E_{\rho} = (\tilde{\Sigma} \times \mathbb{C}^r) / \pi_1(\Sigma), \nabla_{\rho}) & \longleftarrow & \rho \end{array}$$

$$(E, \nabla) \longleftarrow (\text{monodromy})$$

3つの重要なモジュライ空間が表れた

- ① ベッチ・モジュライ空間 (Beitch moduli) $\text{Hom}^{(r, r)}(\pi_1(S), \text{GL}_r(\mathbb{C})) / \sim$
- ② ド・ラーム・モジュライ空間 (de Rham moduli) $\text{Conn}_{\mathbb{C}}(r)$
- ③ ドルバント・モジュライ空間 (Dolbeault moduli) $\text{Higgs}_{\mathbb{C}}(r, 0)$

上述の対応以外にも様々な対応がある。 (漸近理論で非可換ホッジ理論との)
 (小林・Hitchin 対応, λ -接続, 調和束, ...)

何故「非可換ホッジ」理論と呼ばれているのか??? (*伏せ*)

コンパクト r -ラーム多様体 X に対するホッジ理論

$$H_{\text{dR}}^n(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H_{\text{dR}}^{p, q}(X)$$

$$(H_{\text{dR}}^{p, q}(X) := H^q(X, \Omega_X^p))$$

$n=1$ のとき $H^1(X, \mathbb{C}) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^0(X, \Omega_X^1)$

"ベッチ"
"接続"
"Higgs"

$$H^1(X, \mathbb{C}) \simeq \text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{C}) \simeq \text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C})$$

において $\mathbb{C} \in \text{GL}_r(\mathbb{C})$ に置換すると

- ① $H^1(X, \mathbb{C}) \rightsquigarrow H^1(X, \text{GL}_r(\mathbb{C})) \hookrightarrow \text{Hom}(\pi_1(X), \text{GL}_r(\mathbb{C}))$ "ベッチ"
- ② $H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightsquigarrow \check{H}^1(X, \text{GL}_r(\mathcal{O}_X))$ "正則ベッチ束"
- ③ $H^0(X, \Omega_X) \rightsquigarrow H^0(X, \text{GL}_r(\mathbb{C}) \otimes \Omega_X^1)$ "Higgs束"