高校生のときに聞きたかった話

岡山県出身 セシル☆@sesiru8

目次

1 この記事について 1

2 代数曲線上の有理点を考えること 2

3 有理点と保型形式 4

4 ラングランズ予想とフェルマーの最終定理の証明概略 6

5 超弦理論との関係 7

6 おまけ ゼータ関数について 8

7 文献案内 10

1 この記事について

この記事では, 主に「**ラングランズ予想**」やそれと物理学の「**超弦理論**」との関係について書いています. ただ少し専門的な話も多くなってしまいました. 「数学に興味はあるけど難しいことは分からない $\cdots$」という人は, 後半の 6 章や 7 章から読んでみてください.

まず次の有名な定理について考察します.

定理 1.1 (フェルマーの最終定理)**.** n を 3 以上の整数とする. 整数 X, Y, Z が方程式

$$X^n + Y^n = Z^n$$

の整数解なら X, Y, Z のうち, 少なくとも一つは 0 である.

1994 年に Andrew Wiles が証明を与えました. この証明の鍵となったのが「志村-谷山予想」と「Ribet のレベル下げ定理」でした.

さて, 特に「志村-谷山予想」についてですが, この定理によって**代数の世界**と**解析の世界**との間に橋が架けられます. このように, 数学の様々な分野の架け橋となるような理論のひとつとして「**ラングランズ予想**」があります. この記事の主な内容としては

- 代数曲線上の有理点を考えること
- 有理点と保型形式との関係
- ラングランズ予想とは
- 超弦理論との関連

を含んでいます.

2 代数曲線上の有理点を考えること

定理 2.1 (フェルマーの最終定理)**.** n を 3 以上の整数とする. 整数 X, Y, Z が方程式

$$X^n + Y^n = Z^n$$

の整数解なら X, Y, Z のうち, 少なくとも一つは 0 である.

証明. 余白が狭いのでちょっとムリ. □

というのは冗談で, 以下ではこの定理の証明の概略だけを述べます. 具体的には「志村-谷山予想」と「Ribet のレベル下げ定理」を用いることで 1994 年に A.Wiles によって証明されました. ちなみにフェルマー本人がこの主張とともに「私はこの定理について真に驚くべき証明を発見したが, ここに記すには余白が狭すぎる.」という走り書きを残していたことも有名です.

$n = 2$ の場合について考えてみましょう. この場合は, 三平方の定理と関係があります.

定理 2.2. 方程式

$$X^2 + Y^2 = Z^2$$

の整数解 (X, Y, Z) は無限個存在する.

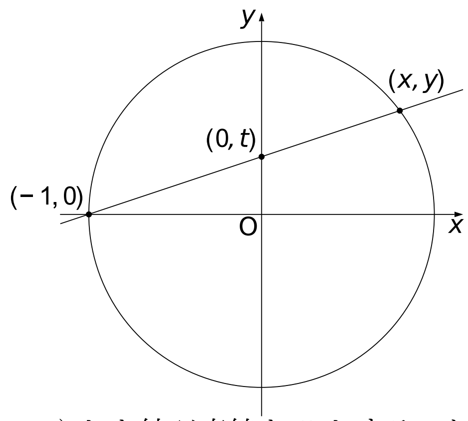
証明. $Z \neq 0$ のとき, 両辺を Z^2 で割ることで

$$\left(\frac{X}{Z}\right)^2 + \left(\frac{Y}{Z}\right)^2 = 1 \tag{2.0.1}$$

ここで X, Y, Z が整数なので, $X/Z, Y/Z$ は有理数である. $X/Z = x, Y/Z = y$ とおくと (2.0.1) は

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{2.0.2}$$

となる. よって, (2.0.2) において $(x, y) = (\text{有理数}, \text{有理数})$ となる点を考えればよい. このような点を有理点という. 次の図で考える.



$(x, y) \neq (-1, 0)$ のとき, (x, y) と $(-1, 0)$ とを結ぶ直線を L とする. また, その y 切片を t とする. このとき $L: y = t(x + 1)$ なので

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ y = \frac{2t}{1 + t^2},\ t = \frac{y}{1 + x}$$

と表せる. ゆえに「t が有理数」であることと「x, y が有理数」であることは同値. これにより,「$x^2 + y^2 = 1$ 上の $(-1, 0)$ 以外の有理点」と「有理数 t」は一対一に対応する. y 軸上には有理数が無限に存在するので, (2.0.2) の有理点は無限に存在する. □

逆に, 同じようにして次のことも分かります.

定理 2.3. 円 $x^2 + y^2 = 3$ 上には有理点が存在しない.

証明. X, Y, Z を整数として $X^2 + Y^2 = 3Z^2$ を考え, これが非自明な整数解 (X, Y, Z) を持つかどうかを調べればよい. □

次に $n = 4$ の場合を考えてみましょう.

定理 2.4. 方程式

$$X^4 + Y^4 = Z^4 \tag{2.0.3}$$

をみたす整数の組 (X, Y, Z) は存在しない.

証明. (2.0.3) をみたす整数の組 (X, Y, Z) があるとすれば, $Y \neq 0$ のとき $X^4 = Z^4 - Y^4$ の両辺を Z^2/Y^6 で割ることで

$$\left(\frac{X^2 Z}{Y^3}\right)^2 = \left(\frac{Z^2}{Y^2}\right)^3 - \frac{Z^2}{Y^2}$$

を得る. $X^2Z/Y^3 = y, Z^2/Y^2 = x$ とおくことで

$$y^2 = x^3 - x \tag{2.0.4}$$

を得る. よって (2.0.4) に $y \neq 0$ をみたす有理数があるかどうかを調べればよい. 次の補題により定理の主張が示される.

補題 2.5. $y^2 = x^3 - x$ の有理数解は

$$(x, y) = (0, 0),\ (\pm 1, 0)$$

のみ.

□

定義 2.6 (暫定版)**.** $y^2 = x^3 - x$ のように

$$y^2 = (x \text{ の } 3 \text{ 次式で, 重根を持たないもの})$$

の形で定まる曲線を**楕円曲線**という.

3　有理点と保型形式

ここまで見たように, フェルマーの最終定理を考察するためには楕円曲線上の有理点を数えれば良さそうです. ただ有理数は無限に存在するので, すべて調べ尽くすことはできそうにありません. そこで, 有限体 $\mathbb{F}_p$ に値を取る点を考えましょう. これは, **素数 p を法とした余りで加法と乗法を定めた集合**です.

例 3.1. $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. この集合に, 次のようなルールで加法と乗法を定めます:

$$0 + 0 = 0,\ 0 + 1 = 1,\ 1 + 0 = 1,\ 1 + 1 = 0,$$

$$0 \times 0 = 0,\ 0 \times 1 = 0,\ 1 \times 0 = 0,\ 1 \times 1 = 1.$$

$\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$. この集合に, 次のようなルールで加法と乗法を定めます:

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 0+2=2,$$
$$1+0=1,\ 1+1=2,\ 1+2=0,$$
$$2+0=2,\ 2+1=0,\ 2+2=1.$$

$$0\times 0=0,\ 0\times 1=0,\ 0\times 2=0,$$
$$1\times 0=0,\ 1\times 1=1,\ 1\times 2=2,$$
$$2\times 0=0,\ 2\times 1=2,\ 2\times 2=1.$$

つまり普通の足し算掛け算を行い, 結果が素数 p を超えるなら, それを p で割ったときの余りを考える, ということです.

これを使えばしらみつぶしができそうです.
以下, $\mathbb{F}_p$ 上で方程式を考えましょう.

問題 3.2. 各 p について, $\mathbb{F}_p$ 上で
$$y^2=x^3-x$$
をみたす組 (x,y) を求めよ.

例 3.3. $\mathbb{F}_3=\{0,1,2\}$ 上だと

$$\begin{cases}(x,y)=(0,0)\text{ のとき},\ 0=0-0\text{ なので成立}\\(x,y)=(1,0)\text{ のとき},\ 0=1-1\text{ なので成立}\\(x,y)=(2,0)\text{ のとき},\ 0=2^3-2=6=0\text{ なので成立}\\(x,y)=(1,2)\text{ のとき},\ 4=1=1-1=0\text{ なので不成立}\end{cases}$$

などなど $\cdots$. □

ここで $y^2=x^3-x$ の $\mathbb{F}_p$ における解の個数を $n(p)$ とおきます. このとき

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	$\cdots$
$n(p)$	2	3	7	7	11	7	15	19	23	$\cdots$
$p-n(p)$	0	0	-2	0	0	6	2	0	0	$\cdots$

さて突然ですが, 次のものを考えます. ここでは定義を述べませんが, このような関数を**保型形式**と呼びます.

$$q\prod_{n=1}^{\infty}\{(1-q^{4n})^2(1-q^{8n})^2\}=q-2q^5-3q^9+6q^{13}+2q^{17}-q^{25}-10q^{29}+\cdots$$

これを $\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n$ とおきます.

命題 3.4. すべての素数 p について

$$a_p=p-n(p)$$

が成り立つ.

参考 3.5. 他にも, $y^2=x^3+1$ に対応する保型形式として $q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{6n})^4$ があります. また $y^2-y=x^3-x^2$ に対応する保型形式として $q\prod_{n=1}^{\infty}\{(1-q^n)^2(1-q^{11n})^2\}$ があります.

このように **代数の世界と解析の世界の間には, ある対応関係が存在する**ことが分かりました.

4 ラングランズ予想とフェルマーの最終定理の証明概略

第 1 章でも書いたように, フェルマーの最終定理は「志村-谷山予想」と「Ribet のレベル下げ定理」を用いることで示されます. 後者については述べられませんが, 前者は次のような予想です:

定理 4.1 (志村-谷山予想 (今は定理))**.** 有理数上定義された楕円曲線 E に対して定まる L 関数と, 上半平面 $\mathbb{H}$ 上の重み 2 の保型形式に対して定まる L 関数は一致する.

L 関数などについてはここでは述べません (興味のある方は検索してみてください). この定理が何を言っているかというと, 前節の対応が一般の楕円曲線について成り立つことを主張しています. つまり「**楕円曲線があれば, それに対応する保型形式が存在する**」ということです. 現在では, 次の**ラングランズ予想**の特別な場合と見なすことができます.

予想 4.2 (数論的ラングランズ予想)**.** F を体とする. F の絶対ガロア群 $Gal(\bar{F}/F)$ の n 次元表現に対して定まる L 関数と, $GL_n(\mathbb{A}_F)$ の保型表現に対して定まる L 関数は一致する.

筆者の力不足で, この定理を噛み砕いて説明することはできません. このラングランズ予想とは, 前節で観察した「代数の世界と解析の世界の間に存在する, ある対応関係」を定式化したものと言えます.

さて, フェルマーの最終定理の証明の流れを説明します. 背理法を用います. もしフェルマーの最終定理が成り立たない, つまりある自然数の組 (X, Y, Z) であって

$$X^n + Y^n = Z^n, \quad n \geq 3$$

を満たすものが存在したとします. すると, この式を変形することにより「**フライ曲線**」と呼ばれる特殊な楕円曲線が作られます. この楕円曲線に対して「志村-谷山予想」を適用することで, 対応する保型形式を得ます. その保型形式に「Ribet のレベル下げ定理」を使うと, 実は**そのような保型形式は存在しない**ということが分かります. これで矛盾が導けたので, フェルマーの最終定理は真であることが従います.

5　超弦理論との関係

これまた突然ですが, 物理の話を始めます. **超弦理論**とは, 現在のところ点粒子だと思われている素粒子が実は**ひも**であるという仮説に基づく理論です. また, 開いたひもの端には「**D-ブレーン**」が貼り付いています. この「**D-ブレーン**」の間に成り立つある関係が「**ミラー対称性予想**」と呼ばれていますが, この予想から「**幾何学的ラングランズ予想**」が得られます. この予想は, 前節の「数論的ラングランズ予想」の幾何学的類似物となっています.

予想 5.1 (幾何学的ラングランズ予想)**.** コンパクトリーマン面 X 上の G-局所系のモジュライ空間 $\mathcal{L}oc_G$ 上の $\mathcal{O}$-加群の圏と, X 上の主 ${}^LG$-束のモジュライ空間 $\mathcal{B}un_{{}^LG}$ 上の $\mathcal{D}$-加群の圏は一致する (圏同値である).

「圏」とは, 数学的構造を取り扱うための枠組みのことです.

この主張に現れる 2 つの圏が, それぞれ「D-ブレーン」のなす圏に対応すると考えられています.

超弦理論は, 一般相対性理論と量子力学の折り合いをつけられる理論として物理学における統一理論の候補と言われています. 一方で, ここまで説明してきたラングランズ予想も, 数学における代数学 · 幾何学 · 解析学を統一できる理論と期待されています. このように, 物理学と数学における統一理論 (の候補) が繋がりを持っているという事実に, 驚きを

感じずにはいられません.

6 おまけ ゼータ関数について

バイト先の塾で生徒に教えている中の息抜き, というか雑談で出すクイズがあります.

問題 6.1.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

を求めよ.

生徒は「無限個足すんだから無限じゃね??」と答えてくれました. 素直でよろしい.

命題 6.2.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\infty$$

これは区分求積法の演習問題としてもよく見るものですね. 自分でも証明してみてください.

では次に, それぞれ 2 乗してから無限個足すとどうなるでしょうか？

問題 6.3.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

を求めよ.

生徒は「やっぱり無限個足すんやから無限やろ」と答えてくれました. しかし正解は

命題 6.4.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

π はもちろん円周率です. 意味が分からないですね！無限個足しているのに無限にならない！しかも円周率まで出てくるし！

そして最後に次のような問を出します.

問題 6.5.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots$$

を求めよ.

「もはや無限大以外ないやろ ...」と思うのですが ...

命題 6.6.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots \text{“}=\text{”} -\frac{1}{12}$$

0 より大きい数字を足しているのにマイナスってどういうこと??? というか、$\frac{1}{12}$ も意味不明. でもちゃんと成立します. ただし, 少し裏技 (解析接続) を必要としますが.

ここまでの式は

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

と定義することで,

$$\zeta(1) = \infty,\ \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

と表せます. この $\zeta(s)$ は**リーマンのゼータ関数**と呼ばれています. また $\zeta(s)$ は, 次の等式によって素数と深く関係しています.

定理 6.7 (オイラー積)**.**

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-1/p^s}$$

ここで $\prod$ は $\sum$ の掛け算バージョンです. つまり, 定理の右辺ではすべての素数について掛け算をします. 例えばオイラーは, 前述の $\zeta(1) = \infty$ とオイラー積を用いて素数が無限に存在することを証明しています.

$\zeta(s)$ の他の値から素数の性質がもっと分かるのではないか?と考えることは自然ですが, 実際, その中でも最も重要と思われているものに有名な**リーマン予想**があります. これは $\zeta(s) = 0$ となる s の性質に関する予想なのですが, 予想が提出されてから 160 年経った今でも完全には証明されていません.

2018 年には, 大数学者 M. F. Atiyah が物理学における微細構造定数を調べることによってリーマン予想を証明した, と発表したことが話題になりました. 残念ながら Atiyah はその後 2019 年 1 月 11 日に逝去され, リーマン予想に関する論文も撤回されたようです. もしかするとこの予想も物理学に深く関係しているのかもしれません.

7　文献案内

ここまで, 主にフェルマーの最終定理やラングランズ予想に焦点を絞って駆け足で書いてきました. 世の中にはずっと分かりやすく読みやすい書物がたくさん存在しますので, 興味の沸いた事柄があれば是非とも自分で調べてみてください. この章が, 関連する文献を探す手助けになれば幸いです.

フェルマーの最終定理に限らず, 大学の数学を分かりやすく説明してくれる本として**数学ガール**シリーズ [1] があります. 特に第 2 巻はフェルマーの最終定理に関するお話なので, 興味を持たれた方は是非読んでみてください.

ラングランズ予想に関する一般向け書籍として E. Frenkel の**数学の大統一に挑む** [2] があります. さらに, この本の内容を基にした NHK の白熱教室が YouTube で観られますので, 是非とも検索してみてください.

第 5 章で書いた超弦理論については, 物理学の基礎知識がなくても雰囲気が掴めそうな一般書籍がいくつかあります. ブルーバックス**大栗先生の超弦理論入門** [3] はお薦めです. この本の最後には $\zeta(-1) = -1/12$ の解説も載っています. この公式を使うことで, 私たちの世界が 9 次元の空間であるという驚きの結果を導いています.

他にも, あまり前提知識が要らないものから本格的な専門書, 最後は論文まで参考文献に挙げてみました. 高校の図書館にはあまり無いとは思いますが, 大きな図書館や本屋さんなら見つかるかもしれません.

参考文献

[1] 結城 浩. 数学ガール. SB クリエイティブ, 2007.

[2] エドワード フレンケル. 数学の大統一に挑む. 文藝春秋, 2015.

[3] 大栗 博司. 大栗先生の超弦理論入門 (ブルーバックス). 講談社, 2013.

[4] 加藤 和也. 解決! フェルマーの最終定理—現代数論の軌跡. 日本評論社, 1995.

[5] 加藤 和也. フェルマーの最終定理, 佐藤-テイト予想解決への道. 岩波書店, 2009.

[6] サイモン シン. フェルマーの最終定理. 新潮社, 2006.

[7] 加藤 和也, 黒川 信重. 数論〈1〉Fermat の夢と類体論. 岩波書店, 2005.

[8] 斎藤 毅. フェルマー予想. 岩波書店, 2009.

[9] E. Frenkel. Lectures on the Langlands program and conformal field theory. Frontiers in number theory, physics, and geometry. II, 387–533, Springer, Berlin,

2007.

[10] R. Donagi, and T. Pantev. Geometric Langlands and non-abelian Hodge theory. Surveys in differential geometry 13, 2009, 85-116.

[11] A. Kapustin, E. Witten. Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program. Commun. Number Theory Phys. 1, 2007, 1-236.