

Ringel - Hall 代数

(ref: Schiffmann
Prinkard.)

A : abelian cat. small ($Ob(A)$ を Hom 集合).

仮定 (finitely)

$$\left[\forall E, F \in A, \quad |\text{Hom}_A(E, F)| < \infty, \quad |\text{Ext}_A^1(E, F)| < \infty. \right.$$

$$M_A := Ob(A) / \sim = (A \text{ の object の 同型類の集合})$$

$\uparrow$ 念のためは, A の object の module だけど, ここではただの集合.

Def

$$\left[\begin{array}{ll} H(A) := \bigoplus_{[E] \in M_A} \mathbb{C}[E] & ; \text{ object の 同型類 の 張子 vec.sp.} \\ \cap \\ \hat{H}(A) := \prod_{[E] \in M_A} \mathbb{C}[E] & ; \text{ 完備化.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccc} H(A) & \xrightarrow{\sim} & \{ f: M_A \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{supp}(f) \neq \emptyset \} \\ \cup & & \cup \\ [E] & \mapsto & \delta_E \end{array}$$

$$\text{, where } \delta_E(F) := \begin{cases} 1 & E \cong F \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\text{Supp}(f) := \{ [E] \in M_A \mid f(E) \neq 0 \}$$

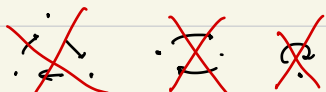
$$\begin{array}{ccc} \widehat{H}(A) & \xrightarrow{\sim} & \{ f: M_A \rightarrow \mathbb{C} : \text{function} \} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sum_{[E] \in M_A} [E] & \leftrightarrow & \delta_A = \sum_{[E] \in M_A} \delta_E \end{array} \quad (\text{Supp}(f) \text{ 有限支持関数})$$

例 4.1

finitely cat. = $\mathbb{F}_q$ 上 の 何れも $\mathbb{F}_q$ 上の abelian cat. である.

例

Q : acyclic quiver $\rightsquigarrow \mathbb{F}_q Q$: path alg.

 $\rightsquigarrow \text{mod } \mathbb{F}_q Q$: abelian cat. of finite right $\mathbb{F}_q Q$ -modules

$$\cdot \xrightarrow{a} \cdot \xrightarrow{b} \cdot$$

$\rightsquigarrow$ 合成 $\in \text{ab}$

compatible

Rem

$$\text{mod } \mathbb{F}_q Q \simeq \text{rep } Q / \mathbb{F}_q$$

(次回 A まで)

15)

C : smooth proj. curve / $\mathbb{F}_q$

$A = \text{Coh}(C)$ ($C = \mathbb{P}^1$, $\mathbb{F}_q$ 上の非特異な代数曲線).

積の定義.

(定義の前に注意)

$$A * C = \sum_{\substack{\uparrow \\ A \subset C \text{ の 2 階層代数}}} |\{0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0\}| B.$$

Def

$A, B, C \in A$,

$$g_{A,C}^B = |\{A' \subset B \mid \begin{matrix} A' \simeq A \\ B/A' \simeq C \end{matrix}\}|$$

と.

$$[A] * [C] = \sum_{[B] \in M_A} g_{A,C}^B [B]$$

と定める.

Rem

他の同型-1-2 と. A, C の位置が逆.

$$\hookrightarrow g_{A,C}^B = |\{C' \subset B \mid \begin{matrix} C' \simeq C \\ B/C' \simeq A \end{matrix}\}|$$

$\uparrow$

これは: $\text{Ext}^1(A, C)_B$ と, (A, C) の順番で書ける.

$[0]$ is unit

$$\text{i.e., } [A] * [0] = [0] * [A] = [A].$$

Def

$$A_E := | \text{Aut}_1(E) | \quad \text{元数.}$$

$$g_{AC}^B = \frac{| \{ 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0; e \} |}{g_A g_C}$$

後に, associativity を示す.

$K(A)$ - grading

$$K(A) = \bigoplus_{[E] \in M_A} \mathbb{Z}[E] \quad / \sim$$

$$\left(\begin{array}{l} 0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0 \text{ ex. exs} \\ [F] \sim [E] + [G] \end{array} \right)$$

$[E]$ の $K(A)$ での class $\in [E]$ を表す.

$$M_A = \coprod_{\alpha \in K(A)} M_{A,\alpha}, \quad M_{A,\alpha} = \{ [E] \in M_A \mid [E] = \alpha \}$$

Prop

$$H_\alpha(A) := \bigoplus_{\substack{[E] \in M_A \\ [E] = \alpha}} \mathbb{C}[E]$$

cf 2.2.

$$H(A) = \bigoplus_{\alpha \in K(A)} H_\alpha(A)$$

cf 2.1.

$$H_\alpha(A) + H_\beta(A) \subset H_{\alpha+\beta}(A)$$

②

$$[A] * [B] = \sum_{[B] \in M_A} \frac{|\{0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0; \text{ex}\}|}{a_A a_C} [B]$$

cf 2.2.

□

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \alpha & & \beta \end{array}$$

M_A 上の関数を用いた積の記述.

$$H(A) = \{ f: M_A \rightarrow \mathbb{C} \text{ ; function s.t. } \text{supp}(f) \text{ が有限} \}$$

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \cup \\ [E] & \longleftrightarrow & \delta_E \end{array}$$

Rem

finitely constructible

↓

以下で記述は $\mathbb{F}_q$ 上で行い、 $\mathbb{C}$ 上の値に、

$$\left\{ \begin{array}{ll} M_A \rightsquigarrow & A \text{ の object の moduli stack } M_A \\ f \rightsquigarrow & M_A \text{ 上への constructible function} \end{array} \right.$$

($q \rightarrow 1$ の limit に対して)

ここで、 A が finitely constructible である場合でも、
重要な性質がある。

出数にのみ依存する canonical の同型が存在する。同視してよい。

↓

Def ②

$f, g \in H(A)$ に対し、 $f * g \in H(A)$ を

$$f * g(B) := \sum_{A \subset B} f(A) g(B/A)$$

と定める。

lem

$f_A, f_C \in H(A)$ に対し.

$$f_A * f_C = \sum_{[B] \in M_A} g_{A,C}^B f_B, \quad f_A * f_C(B) = g_{A,C}^B$$

これより Def ② は最初の積と一致する。

④

$$f_A * f_C(B) = \sum_{A' \subset B} f_A(A') f_C(B/A')$$

$$= \left| \{ A' \subset B \mid A' = A, B/A' = C \} \right|$$

$$= g_{AC}^B$$

Prop

$H(A)$ の $*$ は associative

⑤

$f, g, h \in H(A)$ に対し.

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(C) &= \sum_{B \subset C} (f * g)(B) h(C/B) \\ &= \sum_{B \subset C} \sum_{A \subset B} f(A) g(B/A) h(C/B) \\ &= \sum_{A \subset B \subset C} f(A) g(B/A) h(C/B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (f * (g+h))(C) &= \sum_{A \subset C} f(A) (g+h)(C/A) \\
 &= \sum_{A \subset C} \sum_{B \subset C/A} f(A) g(B) h(\underbrace{C/A}_{B})
 \end{aligned}$$

さて.

$$\begin{array}{ccc}
 \{B \subset C/A\} & \xleftrightarrow{|\cdot|} & \{A \subset B \subset C\} \\
 \underbrace{\quad}_{B=B/A} & \longleftarrow & \underbrace{\quad}_B
 \end{array}$$

よって

$$= \sum_{A \subset B \subset C} f(A) g(B/A) h(\underbrace{C/A}_{B/A})$$

0

Exe を用いた後の記述

$$\kappa_A := a_A \delta_A \quad (a_A = |\text{Aut}_A(A)|)$$

よって.

$$\begin{aligned}
 \kappa_A * \kappa_C &= a_A a_C \delta_A * \delta_C \\
 &= a_A a_C \sum_{B \in M_A} g_{A,C}^B \delta_B \quad \left(\delta_B = \frac{\kappa_B}{a_B} \right) \\
 &= \sum_{B \in M_A} \frac{a_A a_C g_{A,C}^B}{a_B} \kappa_B
 \end{aligned}$$

Prop (Reidtmann's formula)

$$\left[\frac{a_A a_C}{a_B} \cdot g_{A,C}^B = \frac{|\text{Ext}'(C,A)_B|}{|\text{Hom}(C,A)|} \right]$$

2.2.4.

$$\text{Ext}'(C,A) \xrightarrow{\sim} \left\{ 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \text{ ex.} \right\} / \left(B \sim B' \text{ if } B \cong B' \right)$$

bijection

↓ すべて同型で区別.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \cong & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B' & \rightarrow & C \rightarrow 0 \end{array}$$

3.2.1

$\text{Ext}'(C,A)_B$ は、短列の (middle term) $\cong B$ となる subset

$$\left(\text{Ext}'_A(C,A) = \text{Hom}(C, A[1]) \right)$$

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \uparrow \cong & & \downarrow \\ & C & \end{array}$$

なぜ? C, A は剛体.

$$\text{f.t.} \quad \kappa_A * \kappa_C = \sum_{B \in M_A} \frac{|\text{Ext}'(C,A)_B|}{|\text{Hom}(C,A)|} \kappa_B$$

↑

motivic Hall 代数にこの式が成り立つ.

2025 10/10

练习

$\mathcal{A}$: finitely abelian category

$$\forall E, F \in \mathcal{A}, \quad |\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E, F)| < \infty, \quad |\mathrm{Ext}'_{\mathcal{A}}(E, F)| < \infty.$$

$$M_{\mathcal{A}} := \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) / \simeq$$

$$H(\mathcal{A}) := \bigoplus_{[E] \in M_{\mathcal{A}}} \mathbb{C}[E] = \left\{ f: M_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C} \mid \mathrm{Supp}(f) \text{ is finite} \right\}$$

$$\cap$$

$$\hat{H}(\mathcal{A}) := \prod_{[E] \in M_{\mathcal{A}}} \mathbb{C}[E] = \left\{ f: M_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ [E] & \longmapsto & \delta_{[E]} (= \delta_E) \end{array}$$

where

$$\delta_E(F) = \begin{cases} 1 & (E \simeq F) \\ 0 & (E \not\simeq F). \end{cases}$$

$$f, g \in \hat{H}(\mathcal{A}) \quad \text{in } \hat{\mathcal{A}}^{\mathrm{op}}.$$

$$\text{积: } (f * g)(B) := \sum_{A \in \mathcal{A}} f(A) \delta(B/A).$$

γ 定义的. 已证. associative, $1 = \delta_0$: unit. 支持? ($0 \in \mathcal{A}$)

重要好 $\hat{H}(A)$ の element.

$$\delta_A := \sum_{[E] \in M_A} \delta_E \in \hat{H}(A)$$

$$\delta_A(E) = 1, \quad \forall E \in M_A.$$

$\delta_A \in \hat{H}(A)$ の中で、どう種に分けるか？

$\leadsto$ 様々な identity が 現れる (wall-crossing に 関係する)

今日 (9/10) の 7-2

$\hat{H}(A)$ の 中 の identity

- quotient identity
- torsion pair identity
- HN identity

Rem.

$\leftarrow A$ が finitely 生成された適切に Hall 代数 $\hat{H}(A)$ が定められる。

④ Quotient identity

この identity は、DT/PT 対応の証明で使われる identity

$P \in A$: 固定.

Def

$$\textcircled{1} \quad \delta_A^P \in \hat{H}(A) \quad \varepsilon.$$

$$\delta_A^P(E) := |\text{Hom}_A(P, E)| \quad (P \text{ と } E \text{ の hom の数}).$$

$\hookrightarrow \mathbb{Z}$ 値.

$$\textcircled{2} \quad \text{Quot}_A^P \in \hat{H}(A) \quad \varepsilon.$$

$$\text{Quot}_A^P(E) := |\{f: P \rightarrow E \text{ surjection}\}| \quad (P \text{ から } E \text{ への射影の数}).$$

$\hookrightarrow \mathbb{Z}$ 値.

記号

$$\text{Hom}_A^{\rightarrow}(P, E) := \{f: P \rightarrow E \mid \text{surjection}\}$$

$\hookrightarrow$ 射影の数. $\text{Quot}_A^P(E) = |\text{Hom}_A^{\rightarrow}(P, E)|.$

lem (Quotient identity, Brideland's survey or Lem 2.3). Hall of ad pr ...

$$\delta_A^P = \text{Quot}_A^P + \delta_A$$

$\therefore$

$$\delta_A^P(E) = |\text{Hom}(P, E)|$$

$$(\text{Quot}_A^P + \delta_A)(E) = \sum_{A \in \mathcal{C}} \text{Quot}_A^P(A) \cdot \delta_A(E/A) \quad 1$$

$$= \sum_{A \in \mathcal{C}} |\text{Hom}_A^{\rightarrow}(P, A)|$$

$$\text{Def. } \{ f: P \rightarrow E \} \xleftrightarrow{||} \{ P \rightarrow A \hookrightarrow E \} \quad (2.4)$$

Inf

$$| \text{Hom}_A(P, E) | = \sum_{A \hookrightarrow E} | \text{Hom}_A^{\rightarrow}(P, A) |$$

$\text{d}_A^E(E) \quad \text{Quot}_A^P + \text{d}_A(E) \quad \forall E \in M_A \quad \square$

③ Torsion Pair identity

$\mathcal{A}$: abelian category (finitely cogenerated).

Def

$\mathcal{A}$ is full subcategory, pair (T, F) $\mathcal{A}^{\text{fin}}$

Torsion part, free part
↓

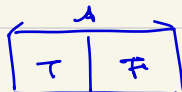
$\mathcal{A}$ is torsion pair iff.

① $\text{Hom}_A(T, F) = 0$

iff. $(\forall T \in T, \forall F \in F \text{ in } \text{Hom}_A(T, F) = 0)$.

② $\forall E \in \mathcal{A}, \exists T \in T, \exists F \in F.$

st. $0 \rightarrow T \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0$ exact.



Rem

① is used. ② is for up to (canonical) isom. iff.

例

$$A = \text{Coh}(X), \quad X: \text{smooth proj. var } / \mathbb{C}.$$

$$\leadsto \begin{cases} T = \{ E \in \text{Coh}(X) \mid \dim \text{supp}(E) = 0 \} \\ F = \{ E \in \text{Coh}(X) \mid \text{Hom}_A(\mathcal{O}_x, E) = 0 \quad \forall x \in X \} \end{cases}$$

cf. 7. Torsion pair $\tau \neq \bar{\tau}$.

$$\text{for } k, \quad A = \text{Coh}(\mathbb{P}^1) \text{ ex.}$$

$$\begin{cases} T = \left\{ \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{n_i}^{\oplus k_i} \right\} \\ F = \left\{ \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{n_i}(n_i)^{\oplus k_i} \right\} \end{cases}$$

以下. A is finitely ex.

Def

$$\left| \begin{array}{l} \delta_T, \delta_F \in \hat{H}(A) \quad \text{ex.} \\ \delta_T(E) = \begin{cases} 1, & E \in T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \delta_F(E) = \begin{cases} 1, & E \in F \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{array} \right|$$

$$\hat{H}(A) \ni \tau$$

$$\delta_T * \delta_F = \delta_A.$$

Defn

Torsion pair は - 一般の abelian cat $\mathcal{A}$ で考えられる概念.

(Torsion pair identity は)

適切に $\hat{H}(\mathcal{A})$ が定義される. この Hall 代数 $\hat{H}(\mathcal{A})$ にも成立する

③③③ HN identity (Reineke : ^{Ref 2003 invention} the Harder-Narasimhan sys. in quantum gp. ...)

Rinkel (1990年代前半)

$[\mathcal{A} = \text{quiver rep} / \mathbb{F}_q \text{ の (twisted) Hall 代数 }]$

$\cong [\text{Quiver に対応する型の KM Lie alg. の quantum gp. の upper half }]$

仮定

$$K(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus n}$$

$\Sigma : K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C} ; \text{ central charge with } \begin{cases} \text{HN property} \\ \text{support property} \end{cases}$

$$\rightsquigarrow P(\phi) \subset \mathcal{A}$$

||

$\{0\} \sqcup \{ \Sigma\text{-semi-stable objects of phase } \phi \} \quad \phi \in (0,1]$

Def

Stability Condition Σ M 与えられている.

$$\delta^{\Sigma-\text{ss}}(\phi) \in \hat{H}(A) \text{ である.}$$

$$(\delta^{\Sigma-\text{ss}}(\phi))(E) := \begin{cases} 1 & E \in P(\phi) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Rem

- Σ M fix されて, PA がある時, $\delta^{\Sigma}(\phi)$.
- Σ なくても, HN 分解できて.

適切に $P(\phi)$ に相当する M の定数状況でも δ^{Σ} M 定義できる.

Lem (Reineke)

1. stability M A に与えられている時.

$$\delta_A = \bigcap_{\phi \in \text{Cor}} \delta^{\Sigma}(\phi)$$

ここで $\cap$ の意味は.

$$\delta^{\Sigma}(\phi_1) + \delta^{\Sigma}(\phi_2) + \dots$$

す. $\phi_1 > \phi_2 > \dots$ の順番で加える. ということ.

E を代入すると, 有限個の $\phi \in [0,1]$ を除く, $\delta^s(\phi) = 1$.

$$\delta^s(\phi) = 1 + \underbrace{\delta_+^s(\phi)}_{\substack{\text{semistable object 上} \\ \text{値 1 を取る函数}}} \quad \text{と分かる.}$$

$$\prod_{\phi \in [0,1]} (1 + \delta_+^s(\phi)) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \geq \phi_1 > \phi_2 > \dots > \phi_k > 0} \delta_+^s(\phi_1) + \delta_+^s(\phi_2) + \dots + \delta_+^s(\phi_k)$$

$$\delta_A = \prod_{\phi \in [0,1]} \delta^s(\phi) \quad \text{と, } \underline{\text{HN-identity}} \quad \text{と呼ぶ.}$$

Hall 代数上の積分写像 (integration map)

定義 1.7

$\mathbb{C}$ -alg. hom $K(A)_{\geq 0}$ $\leftarrow$ $\mathbb{C}$ -alg. $K(A)_{\geq 0}$ を含む.

$$\begin{array}{ccc} I : & H(A) & \longrightarrow R \\ \downarrow & & \downarrow \\ & f & \longmapsto i(f) \end{array}$$

$$\text{ie, } I(f \circ g) = I(f) I(g)$$

$$\text{也, } \hat{I} : \hat{H}(A) \longrightarrow \hat{R} \quad (\text{適切に完備化})$$

あるとき, このとき, $\hat{H}(A)$ の identity も $\hat{R}$ の identity も得る.

$$\hat{I}(\delta_A) = \hat{I}(\delta_T) \hat{I}(\delta_F)$$

(torsion pair identity かつ偶々 $\hat{R}$ の identity)

I は 数え上げで 定義されている } • Euler 数 である
• 重なり Euler 数 である (DT 不変量)

→ 数え上げ、母関数、内、identity かつ 偶々。

差別的には...

$$\hat{R} = \begin{cases} \text{Poisson Torus の 座標環} & (\text{Euler 数}) \\ \text{twisted Poisson Torus の } \sim & (\text{DT 不変量}) \\ \text{quantum Torus の } \sim & (\text{motivic DT 不変量}) \end{cases}$$

$\hat{H}(A)$ 全体で I は 定義 できる。

$$\hat{H}(A)_{\text{reg}} \subset \hat{H}(A) \quad \text{と } \hat{H}(A) \text{ の } \sim \text{ がある。}$$

(sub alg.)

$$I_{DT} : \hat{H}(A)_{\text{reg}} \longrightarrow (\text{twisted Poisson Torus の 座標環})$$

Quiver によって CY3 - alg. の motivic DT の話

||

$\mathbb{F}_q$ 上での Hall 代数 と 積分 の話.

軽く復習

$\mathcal{A}$: finitely abelian category

$$M_{\mathcal{A}} := \mathcal{A} / \sim$$

$$\leadsto H(\mathcal{A}) := \{ f: M_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{Supp}(f) \text{ is finite} \}$$

$\cap$

$$\hat{H}(\mathcal{A}) := \{ f: M_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C} \}$$

$$f, g \in H(\mathcal{A}) \quad \text{に 対し.}$$

$$f * g(B) = \sum_{A \subset B} f(A) g(B/A)$$

$$\text{に 対し} \quad f * g \in H(\mathcal{A}) \quad \text{が 定まる.}$$

$$\text{Def 1} \quad A = \{ \text{finite dim'nl vec. sp.} / \mathbb{F}_q \}$$

$$\cong \text{Rep}_{\mathbb{F}_q}(\cdot) \quad \text{A1 - quiver}$$

$$M_A = \{ \mathbb{F}_q^n \mid n \geq 0 \}$$

$$\delta_n = \delta_{\mathbb{F}_q^n} \quad \text{class.}$$

$$H(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \delta_n$$

Lemma

$$\delta_n * \delta_m = | \text{Gr}_{n,n+m}(\mathbb{F}_q) | \delta_{n+m}$$

②

$$\delta_n * \delta_m(\mathbb{F}_q^k) = \sum_{\substack{V \subset \mathbb{F}_q^k \\ \dim V = n}} \delta_n(V) \delta_m(\mathbb{F}_q^k / V)$$

$$\begin{cases} \dim V = n \\ k - \dim V = m \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k = n+m \\ \text{not clear} \\ \text{not obvious} \end{matrix}$$

$$= \sum_{\substack{V \subset \mathbb{F}_q^k \\ \dim V = n}} \delta_{k,n+m} \quad (\text{not clear - not obvious})$$

$$= | \text{Gr}_{n,n+m}(\mathbb{F}_q) | \delta_{n+m}(\mathbb{F}_q^k)$$

□

Lemma

$$| \text{Gr}_{n,n+m}(\mathbb{F}_q) | = \frac{(q^{n+m}-1) \cdot (q^{n+m-1}-1) \cdots (q^{m+1}-1)}{(q^n-1) \cdot (q^{n-1}-1) \cdots (q-1)} =: \begin{bmatrix} n+m \\ n \end{bmatrix}_q$$

これを示すには本を用いる.

Lemma

$$|GL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{1}{2}n(n-1)} (q^n - 1) \cdot (q^{n-1} - 1) \cdots (q - 1)$$

Proof

$$GL_1(\mathbb{F}_q) = \mathbb{F}_q^\times \quad \text{by} \quad |GL_1(\mathbb{F}_q)| = q - 1.$$

[Proof] 漸化式

$$|GL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{n-1} \cdot (q^n - 1) \cdot |GL_{n-1}(\mathbb{F}_q)|$$

これを証明する.

$$GL_n(\mathbb{F}_q) \cong \mathbb{F}_q^n \ni \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \pi: & GL_n & \longrightarrow \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\} \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \delta & \longmapsto \delta \cdot \vec{e} \end{array}$$

これは Fiber bundle としておき, $\pi^{-1}(\vec{e}) = \{\vec{e} \in \text{Fix of } GL_n \text{ の要素}\}$

$$\delta \cdot \vec{e} = \vec{e} \quad (\Leftrightarrow) \quad \delta = \begin{pmatrix} 1 & \overline{*} & \overline{*} & \cdots & \overline{*} \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \quad \delta' \in GL_{n-1}(\mathbb{F}_q)$$

$$\text{by } \pi^{-1}(\vec{e}) \cong \mathbb{F}_q^{n-1} \times GL_{n-1}(\mathbb{F}_q)$$

任意の $\delta \in \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$ へ.

$$|GL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{n-1} \times |GL_{n-1}(\mathbb{F}_q)| \times (q^n - 1)$$

□

Rem

Motivic version だと同様、 $t_0^n = 0$ がある。

$$[A'] = \mathbb{L} \quad \text{やはり}$$

$$[GL_n(\mathbb{C})] = \mathbb{L}^{n-1} (\mathbb{L}^n - 1) [GL_{n-1}(\mathbb{C})] \quad \text{in } K(\text{Var}/\mathbb{C})$$

これをもちいて、 $Gr_{n,n+m}(\mathbb{F}_q)$ の GL-等価空間の構造から。

$$|Gr_{n,n+m}(\mathbb{F}_q)| \text{ は } q \text{ の多項式。} \quad |Gr_{n,n+m}(\mathbb{F}_q)| = \frac{|GL_{n+m}(\mathbb{F}_q)|}{q^{nm} \cdot |GL_n(\mathbb{F}_q)| \cdot |GL_m(\mathbb{F}_q)|}$$

今の場合は積分環同型

$$\begin{array}{ccc} 1: H(A) & \longrightarrow & \mathbb{C}[x, q^{\frac{1}{2}}, |GL_n(\mathbb{F}_q)|^{-1} \quad (n \geq 1)] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \delta_n & \longmapsto & \frac{q^{\frac{n}{2}} x^n}{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q-1)} =: I(\delta_n) \end{array}$$

やはり、 I は ring hom.

$$\text{very} \quad I(\delta_n * \delta_m) = I(\delta_n) I(\delta_m).$$

Rem

$$\text{Ext}^{\geq 2} = 0$$

- Hereditary finitely ab. cat. $\mathcal{A}$ の Hall alg. $H(\mathcal{A})$ は可換。一般的に
1 つ積分環同型の構成法が存在する。(Reineke)

- hereditary & finitely abelian cat. $\mathcal{A}$ の例

① $\text{Coh}(C/\mathbb{F}_q)$; C ; smooth proj. curve / $\mathbb{F}_q$

② $\text{rep}_{\mathbb{F}_q}(Q)$; Q ; acyclic quiver

$$S_A = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \in \hat{H}(A) \quad \text{Euler characteristic.}$$

$$I(S_A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n}{2}} x^n}{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q - 1)} =: F_q(x) \quad \text{Quantum dlog.}$$

(q-adic logarithm?)

$$\log(1-x) = - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right)$$

$$\text{Li}_2(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$\log F_q(x) = \frac{-1}{q-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} + O(1)$$

$$\lim_{q \rightarrow 1} (q-1) \log F_q(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$\log$ Euler characteristic $(q-1)$ Euler characteristic $q \rightarrow 1$ limit Euler characteristic.

V : variety / $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}^n$ $\mathbb{Z}^n$ stratification Euler characteristic

$$\rightsquigarrow \chi(V(\mathbb{C})) = |V(\mathbb{F}_q)|_{q \rightarrow 1}$$