§1.5 Rank one DT invariants

X : CY3.

$\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})$, $n \in \mathbb{Z}$. に対し、

$$v = (1, 0, -\beta, -n) \in H^0(X) \oplus H^2(X) \oplus H^4(X) \oplus H^6(X) =: \Gamma$$

と定める。 (Poincaré dual $H_2(X) \cong H^4(X)$ を用いた)。

この場合、安定層のモジュライ空間 $M_X^{H\text{-}St}(v)$ は fine でかつ $SS = St$.

$$I_n(X,\beta) := \{ Z \subset X \mid \dim Z \leq 1,\ [Z] = \beta,\ \chi(\mathcal{O}_Z) = n \} / \simeq$$

とおくと、 $M_X^{H\text{-}St}(v) \cong I_n(X,\beta)$ となる。

∵ (Rem - Example p.8).

$$v = (1, 0, -\beta, n) \in \Gamma := H^{2*}(X,\mathbb{Q})$$

のとき、 H 安定層 E で $ch(E) = v$ なものを考える。

(Rem 1.1) より E は pure なので、 [Huy-Lehn Prop 1.1.10] より

単射

$$E \hookrightarrow E^{\vee\vee}$$

が存在。 $v = (1, 0, -\beta, n)$ より $E^{\vee\vee}$ は $rk\, E^{\vee\vee} = 1$ の反射層ゆえ

直線束となり、 $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, $c_1 = 0$ より $E^{\vee\vee} \cong \mathcal{O}_X$.

[Okonek-Schneider-Spindler II. Lem 1.15]

$$1 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \to 1$$

$$0 \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X,\mathbb{Z})$$ が単射.

$$0 \to E \to \mathcal{O}_X \to Q \to 0 \quad \text{ex.}$$

s.t. $\operatorname{codim} \operatorname{Supp}(Q) \geq 2$.

$\therefore$ $E \cong I_Z$, ただし $Z \subset X$ は X の閉部分スキームで

$\mathrm{ch}(I_Z) = (1, 0, -\beta, n)$ より

$\dim Z \leq 1$, $[Z] = \beta$, $\chi(\mathcal{O}_Z) = n$.

$$\therefore \quad \begin{array}{ccc} M_X^{H\text{-st}}(v) & \longrightarrow & I_n(X, \beta) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [E] & \longmapsto & [Z] \ \text{s.t.}\ E \cong I_Z \end{array} \quad \text{は同型となる.}$$

特に $v_0 = 1$ (rk 1) の場合, $M_X^{H\text{-st}}(v)$ は H に依らず,

また, 更に 半安定層 も存在しない...

$$\mathrm{g.c.d}\,\{\chi(E \otimes F) \mid [E] \in M_X^{H\text{-st}}(v),\ F \in K(X)\} = 1$$

となるので fine moduli sp. $\square$

この場合 の DT 不変量

$$I_{n,\beta} := DT_H(1, 0, -\beta, -n) \quad \in \mathbb{Z}$$

を考える. さらに これらの 生成関数 を,

$$I_\beta(X) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} I_{n,\beta}\, q^n, \qquad I(X) := \sum_{\beta \geq 0} I_\beta(X)\, t^\beta$$

とおく. ($n \ll 0$ で $I_{n,\beta} = 0$ なので $I_\beta(X)$ は Laurent 級数)

Example

n点のヒルベルトスキーム

$\beta=0$ の場合, $M_X^{H\text{-}St}(v) \cong \mathrm{Hilb}^n(X)$.

この場合

$$I_{\beta=0}(X) = M(-q)^{e(X)}.$$

ここで, $M(q) = \prod_{k\geq 1} \frac{1}{(1-q^k)^k} = 1+q+3q^2+6q^3+\cdots$

は MacMahon 関数.

$\mathrm{Hilb}^n(X)$ の stratification を考えることで, $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)$ の場合に帰着.

さらに $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)$ へのトーラス $T=(\mathbb{C}^\times)^3$ の作用について.

局所化の議論を用いて. ($\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)^T$ を固定点集合として).

$$I_{n,0}(\mathbb{C}^3) = (-1)^n \, e(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)^T)$$

となる. $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)^T$ は有限集合となり $e(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)^T) = \#\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)^T$.

$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)$ の点は. ideal $I \subset \mathbb{C}[x,y,z]$ であって,

$\dim\left(\mathbb{C}[x,y,z]/I\right) = n$ をみたすものに対応する.

さらに, $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)^T$ は, このような ideal のうち, x,y,z の単項式で

生成されるものと1対1に対応する.

よって, $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ で $|A|=n$ となるものについて.

$$\mathbb{C}[x,y,z]/I = \bigoplus_{(i,j,k)\in A} \mathbb{C}\cdot x^i y^j z^k$$

と表せる.

I は ideal なので、 $(i,j,k) \in A$ に対し、

$$\begin{cases} i \geq 1 \Rightarrow (i-1, j, k) \in A. \\ j \geq 1 \Rightarrow (i, j-1, k) \in A \\ k \geq 1 \Rightarrow (i, j, k-1) \in A \end{cases}$$

これらは、大きさ n の 3次元のヤング図形と対応する。

その数 $|S_n|$ の生成関数は MacMahon 関数で書け、

$$1 + \sum_{n \geq 1} |S_n| q^n = M(q)$$

$$\therefore \quad I_0(\mathbb{C}^3) = \sum_{n \geq 0} I_{n,0}(\mathbb{C}^3) q^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} e(\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)^T) (-q)^n$$

$$= 1 + \sum_{n \geq 1} |S_n| (-q)^n = M(-q).$$

$\square$

Example

$C \subset X$: $C \cong \mathbb{P}^1$ で $N_{C/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ となる曲線。

X 上の曲線であって、そのホモロジー類 β が $\beta = d[C]$ と書けるものの台

$\mathrm{Supp}\,\beta$ が C であるとする。 このとき、

$$\sum_{d \geq 0} I_{d[C]}(X) t^d = M(-q)^{e(X)} \cdot \prod_k \left(1 - (-q)^k t\right)^k$$

ところで、 $\dfrac{I_{[C]}(X)}{I_0(X)}$ を計算する (曲線の数え上げ)

$$\sum_{d\geq 0} I_{d[C]}(X)\, t^d = I_0(X) + I_{[C]}(X)\, t + I_{2[C]}(X)\, t^2 + \cdots$$

$$\begin{aligned}
(左辺) &= M(-q)^{e(X)} \prod_{k\geq 1} \left(1-(-q)^k t\right)^k \\
&= I_0(X) \cdot \left\{ (1-qt)\cdot(1+q^2t)^2 \cdot (1-q^3t)^3 \cdot \cdots \right\} \\
&= I_0(X) + \underbrace{I_0(X)\left\{ q - 2q^2 + 3q^3 - \cdots \right\}}_{= I_{[C]}(X)} t + \cdots
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{I_{[C]}(X)}{I_0(X)} = q - 2q^2 + 3q^3 - \cdots = \frac{q}{(1+q)^2}.$$

$\frac{q}{(1+q)^2}$ は q の有理関数で、$q \mapsto q^{-1}$ で不変。

このような性質が一般に成立する。

Thm 1.6. (MNOP 予想，戸田，Bridgeland の有理性定理)

級数 $\frac{I_\beta(X)}{I_0(X)}$ は q に関する有理関数を $q=0$ で Laurent 展開したもので、$q \mapsto q^{-1}$ で不変。

$\frac{I_\beta(X)}{I_0(X)}$ は [MNOP] の論文で、GW 不変量と DT 不変量の対応を調べるために導入された。

Gromov - Witten 不変量

X : CY3.

C : 連結な射影的代数曲線. で. 高々結節点しかないとする.

$p_1, \cdots, p_n \in C$; C の滑らかな点.

射 $f : C \to X$ は,

$$\{ g \in \mathrm{Aut}(C) \mid g(p_i) = p_i,\ f \circ g = f \}$$

が有限群であるとき. 組 $(C, p_1, \cdots, p_n, f)$ を 安定写像 (stable map) と呼ぶ.

各 $g \geq 0$, $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ に対して. 空間

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$$

を $g(C) = g$, $f_*[C] = \beta$ となる $(C, p_1, \cdots, p_n, f)$ のモジュライスタック とする.

これは DM スタック となる.

さらに 自然な完全障害理論も存在して.

$$\dim [\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}} = -K_X \cdot \beta + (\dim X - 3) \cdot (1-g) + n.$$

よって, $n = 0$, $X = CY3$ のとき. $\dim [\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}} = 0$.

$$GW_{g,\beta} := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,0}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}} 1 \quad \in \mathbb{Q}$$

を Gromov - Witten 不変量 という.

Conj (thm 2) (GW/DT 対応, J. Pardon 2023?)

変数変換 $q = -e^{i\lambda}$ の下, 次の等式が成立:

$$\exp\left(\sum_{g\geq 0,\, \beta>0} GW_{g,\beta}\, \lambda^{2g-2} t^{\beta}\right) = \frac{I(X)}{I_0(X)}$$