

### §1.3. DT - Invariants

以降

$X$ : 滑らかな射影的な3次元 Calabi-Yau 多様体.

i.e.,  $(CY3\text{-fold})$ .

$$\dim X = 3, \quad K_X \cong \mathcal{O}_X, \quad H^i(\mathcal{O}_X) = 0.$$

$X$  上の  $CY3$  ffs. Serre 双対定理 により

$$\forall E \in \text{Coh}(X), \quad \text{Ext}^i(E, E) \cong \text{Ext}^3(E, E \otimes K_X)^\vee \cong \text{Ext}^2(E, E)^\vee$$

より、大域的に

$$\dim \text{Ext}^1(E, E) - \dim \text{Ext}^2(E, E) = 0$$

なること. (Riemann-Roch) により、完全障害理論 上の  $M_X^{\text{H-S}}(n)$  上大域的に成立する.

さらにこの場合,

$$T_p M_X^{\text{H-S}}(n) \cong \text{Ext}^1(E, E) \cong \text{Ext}^2(E, E)^\vee \cong (\text{障害数、射影次元})^\vee$$

なので、以下の“対称的完全障害理論”が成立する.

# Def 1.6

$C$  上  $n$ -dim  $M$  上の 完全障害理論

$$E' \rightarrow \tau_{\geq -1}(L_M)$$

は,  $\mathcal{O}_M^{\vee}(M)$  における同型

$$\theta: E' \xrightarrow{\sim} (E')^{\vee}[1]$$

つまり  $\theta^{\vee} = \theta[1]$  (よ  $\theta^{\vee}[1] = \theta$ )  $\hookrightarrow$  満たせるだけ存在して.

対称的完全障害理論 (symmetric perfect obstruction theory) と呼ぶ.

例

$A$ : smooth scheme.

$\Omega_A \rightarrow A$ ,  $f \in \Gamma(A, \mathcal{O}_A)$ ,  $s = df \in \Gamma(A, \Omega_A)$  に対し.

$U = \{df=0\} \subset A$  とする. これは  $f$  の critical locus である.

完全障害理論

$$\begin{array}{ccc} E' = & T_A|_U & \xrightarrow{\text{Hess}(f)|_U} \Omega_A|_U \\ & \downarrow & \sim \downarrow \text{id} \\ \tau_{\geq -1} L_U = & T^{\vee}_U & \longrightarrow \Omega_A|_U \end{array}$$

は,  $(\Omega_A|_U)^{\vee} = T_A|_U$  である.

$$(E')^{\vee}[1] = E'$$

これは  $f$  に対して 対称的完全障害理論 である.

$M_x^{H-Sr}(U)$  は fine moduli sp. と仮定す. したがって, universal sheaf  
 $U \in \text{Coh}(X \times M_x^{H-Sr}(U))$

は存在す.

自然に誘導される射

$$\mathcal{O}_{X \times M_x^{H-Sr}(U)} \longrightarrow \text{RHom}_{X \times M_x^{H-Sr}(U)}(U, U)$$

の写像錐 (cone)  $C \in \text{RHom}_{X \times M_x^{H-Sr}(U)}(U, U)$ . したがって,

Thm 1.2.

$M = M_x^{H-Sr}(U)$  上に 対称的完全障害理論

$$\varepsilon := (\text{Rpr}_M, \text{R}\mathcal{H}om_{X \times M}(U, U)_*[\cap])^\vee \rightarrow \tau_{\geq -1}(\mathcal{L}_M)$$

は存在す.

( $p_M: X \times M \rightarrow M$  は射影)

Rem 1.13

$M_x^{H-Sr}(U)$  は "fine" moduli sp. と仮定する. したがって, 本質的に (5.1.1)

(universal sheaf は存在す, "twisted universal sheaf" は存在す)

同様のことが成り立つ).

(Thm 1.1) (Thm 1.2) に  $\mathbb{F}_q$  0 次元の 仮想 ハイヴ

$$[M_x^{H-\pi}(v)]^{vir} \in A. (M_x^{H-\pi}(v))$$

が 存在 する.

ここで.  $M_x^{H-\pi}(v)$   $\mu^H$   $st = \pi$  条件  $\pi \rightarrow \pi$  する  $\pi$  仮定 する.

(特に.  $M_x^{H-\pi}(v)$   $\pi$  射影 的 スキーム  $\pi$  仮定 する)

Def 1.7.

$X$  : 滑らかな射影 的 3 次元  $CY$  の 特性

$M_x^{H-\pi}(v)$  : fine moduli sp.  $\pi^H$   $st = \pi$  条件  $\pi \rightarrow \pi$  する  $\pi$  仮定 する.

このとき. Donaldson - Thomas 不変量  $\pi$ .

$$DT_H(v) := \int_{[M_x^{H-\pi}(v)]^{vir}} 1 \quad (= \deg [M_x^{H-\pi}(v)]^{vir}) \in \mathbb{Z}.$$

$\pi$  定義 する.

(例)

ここで与える  $M := M_x^{\text{H-S}}(U)$  は smooth かつ Connected である。

これは、射影的完全降下理論 である。

$$\begin{array}{ccc} T_M & \xrightarrow{0} & \Omega_M \\ \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_M \end{array}$$

と与えられる。この場合、(上原・戸田 問(2.9)) により、

$$[M]^{\text{vir}} = e(\Omega_M)$$

を得る。

$$\therefore DT_M(v) = \int_M e(\Omega_M) = (-1)^{\dim M} \underbrace{e(M)}_{\text{位相的オイラー数。}}$$

Thm 1.3.

DT 不変量は  $X$  の変形で不変。

つまり、滑らかな代数曲線  $C$  上の CY3-fold の 1次元ベラキ-変形

$$\pi: X \rightarrow C$$

相対的に豊富で  $X$  上の因子  $\omega$ ,  $v \in \Gamma(C, R\pi_* \mathcal{O}_X)$

とする。各  $t \in C$  に対して  $(X_t, v_t, \omega_t)$  は Def 1.7 の仮定を

満たす。  $X_t$  上の DT 不変量  $DT_{\omega_t}(v_t)$  は  $t \in C$  に依存

しない。  $(X_t := \pi^{-1}(t), v_t = v|_{X_t}, \omega_t = \omega|_{X_t})$ 。

## §1.4 DT invariants via Behrend functions

DT 不変量を定義から計算することは難しい.

→ Behrend により, DT 不変量を  $\text{mod } p$  の特異点に対して  
重みをつけた Euler 数 として記述できることが示された.

### Milnor fiber

$V$ : 複素的様体

$f: V \rightarrow \mathbb{C}$  : 正則関数

各  $p \in V$ , 近傍で  $\|\cdot\|$  を適当な  $V$  のノルムとすると.

$$M_p(f) := \{x \in V \mid \|x - p\| < \delta, f(x) = f(p) + \varepsilon\}$$

の位相タイプは  $\varepsilon, \delta$  のとり方に依らない. これを

$p$  における  $f$  の Milnor ファイバー と書く.

ここで,

$$\chi_B(p) := (-1)^{\dim V} (1 - e(M_p(f))) : V \rightarrow \mathbb{Z}$$

と表す. これは  $V$  上の構成可能多散 であり.

i.e.,  $\forall m \in \mathbb{Z}$ ,  $\chi_B^{-1}(m)$  は 構成可能集合.

Rem (cf. Hartshorne Exercise II.3.18)

$X$  : Zariski 位相空間.

$X$  の 部分集合 からなる 族  $\mathcal{F}$  是.

(1) 任意の (非) 部分集合 は  $\mathcal{F}$  に 含まれる.

(2)  $\mathcal{F}$  の 元 の 有限個 の 交わり は  $\mathcal{F}$  に 含まれる.

(3)  $\mathcal{F}$  の 元 の 補集合 は  $\mathcal{F}$  に 含まれる.

という条件 を満たす 最小 の もの 是.

$X$  の 構成可能 部分集合 (constructible subset) 是.

└  $\mathcal{F}$  に 含まれる 部分集合 の こと 是.

正則函数  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  に対し, 是の Critical locus  $\text{Crit}(f) \subset V$  是.

$$df: T_V \rightarrow \mathcal{O}_V$$

の 像 で 生成 是  $\mathcal{O}_V$  の ideal で 定義 是,  $V$  の 局所的 部分集合 是.

## Thm (Behrend)

$M$ : 有限型の  $\mathbb{C}$ -スキーム に対し、次の (i) (ii) に対して  
構成可能因数

$$\chi_B: M \rightarrow \mathbb{Z}$$

が存在する:

(i)  $x \in M$  に対し、開近傍  $U \subset M$ ,

複素の持主  $V$ ,  $p \in V$ ,  $V$  上の正則函数  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$

同型  $(U, x) \cong (\text{Crit}(f), p)$  が存在するほど

成立.

$$\chi_B(x) = (-1)^{\dim V} (1 - e(M_p(f))).$$

(ii)  $M$  が固有スキームで、 $\mathcal{E} \rightarrow \tau_{\geq 1}(\mathcal{L}_M)$  が

対称的完全障害理論 であるならば,

$$\int_{[M]^{\text{vir}}} 1 = \int_M \chi_B \, de := \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \cdot e(\chi_B^{-1}(k)).$$

特に, 3次元 CY の样体 上の 安定層。モジュライ空間 に関する  
上の Thm により, DT 不変量 の 計算 できる:

Thm 1.5

$X$  : CY 3-fold. とする.

固定写像  $(U \subset \text{Ext}^1(E, E))$

$$\kappa : U \longrightarrow \text{Ext}^2(E, E) \cong \text{Ext}^1(E, E)^{\vee}$$

は, ある 正則函数  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  により,

$$\kappa = df$$

と表せる.

特に,  $M_x^{H\text{-st}}(U)$  は 局所解析的に  $\text{Crit}(f) \subset U$  と同型.

例 (諸問題, 例 9.9)

$$M_x^{H\text{-st}}(U) \cong \text{Spec}(\mathbb{C}[t]/(t^{n+1})) \quad \text{と表す.}$$

ここで,  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = z^{n+1}$  とする.

$M_x^{H\text{-st}}(U)$  は  $\text{Crit}(f) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ .

この場合  $M_0(f) = \{ p_1, p_2, \dots, p_{n+1} \mid p_i \in \mathbb{C} \text{ st. } p_i^{n+1} = 1 \}$

$$\chi_B(0) = (-1)^1 (1 - e(M_0(f))) = (-1) \cdot (1 - (n+1)) = n$$

$$\therefore DT_H(U) = n.$$