

Ch. 1. DT invariants on CY3

(参考: 上原千明 氏)

§1.1. Moduli spaces of semi-stable sheaves on algebraic varieties.

X : 滑らかな射影代数多様体

$\mathcal{O}_X(1)$: X 上の ample line bundle.

$$H := c_1(\mathcal{O}_X(1)).$$

Hirzebruch - R.R. は $E \in \text{Coh}(X)$ の Hilbert の形式 は

$$\begin{aligned}\chi(E(m)) &= \int_X \text{ch}(E(m)) \cdot d_X \\ &= a_d m^d + a_{d-1} m^{d-1} + \dots + a_0\end{aligned}$$

$$(a_0, \dots, a_d \in \mathbb{Q}, a_d \neq 0)$$

と表せる. ($d = \dim \text{Supp}(E)$).

特に,

$$\overline{\chi}(E(m)) := \frac{1}{a_d} \chi(E(m)) = m^d + \frac{a_{d-1}}{a_d} m^{d-1} + \dots \in \mathbb{Q}[m]$$

は、被約 Hilbert の形式 と呼ばれる。

約束

$$f_1, f_2 \in \mathbb{Q}[m] \text{ に対して}$$

$$\deg(f_1) > \deg(f_2) \quad \text{意味}$$

$$\deg(f_1) = \deg(f_2) \quad \text{かつ} \quad f_1(m) < f_2(m), \quad m \gg 0$$

のとき, $f_1 < f_2$ と表す。

Def 1.1.

対象 $E \in \text{Coh}(X)$ に対し.

(i) 任意の部分層 $0 \subsetneq E' \subsetneq E$ に対し

$$\overline{\chi}(E'(m)) \leq \overline{\chi}(E(m))$$

が成り立つとき, E は H- (半)安定 であるという.

(ii) E が H-半安定だが H-安定でないとき.

E は 真に H-半安定 (strictly H-semistable) であるという.

(iii) E が H-半安定である. 特に H-安定な層の直和として表せるとき, E は H-polystable であるという.

Prop

定義により, $E \in \text{Coh}(X)$ が H-半安定であるとは, 純 (pure) である.

$$\text{i.e., } 0 \subsetneq E' \subsetneq E, \quad \dim \text{Supp}(E') = \dim \text{Supp}(E).$$

$E \in \text{Coh}(X)$ に対し, フィルトレーション

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E \quad (1.1)$$

$$\text{s.t. } F_i := E_i / E_{i-1}$$

が存在する.

Def 2.

フィルトレーション (1.1) について.

(i) 各 F_i が H -半安定 である.

$$\forall i, \quad \overline{\chi}(F_i, m) \leq \overline{\chi}(F_{i+1}, m)$$

とすればよい. (1.1) は Harder - Narasimhan (HN) フィルトレーション と呼ばれる.

(ii) 各 F_i が H -安定 である.

$$\forall i, \quad \overline{\chi}(F_i, m) = \overline{\chi}(E, m)$$

とすればよい. (1.1) は Jordan - Hölder (JH) フィルトレーション と呼ばれる.

Fact (cf. Huybrechts - Lehn)

- 任意の $E \in \text{Coh}(X)$ に対し, HN フィルトレーションは同型の違いを除いて一意に存在.
- 任意の H -半安定層 E に対し, JH フィルトレーションが存在する. これは一意ではない. $\oplus F_i$ は同型の違いを除いて一意.

$$P := \text{Im}(\text{ch} : K(X) \rightarrow H^{2*}(X, \mathbb{Q})) \quad \text{と定.}$$

各 $\nu \in P$ に対し, 2-functor

$$\mathcal{M}_\times(\nu) : (\text{Gr}/\mathbb{C})^{\text{op}} \longrightarrow (\text{Groupoid}).$$

を次のように定める.

$\mathbb{C}$ -スキーム $T \in (\mathbb{G}_m/\mathbb{C})$ に対し.

T -平坦な層の族 $\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(X \times T)$ であって.

$\forall t \in T, \quad \mathcal{E}_t \in \mathrm{Coh}(X) \quad \text{の Chern 指標 } \nu \text{ を持つ } \mathbb{Q}$
 の族 Groupoid に対応させる.

Fact

$\mathcal{M}_X(\nu)$ は 局所有限型の Artin stack を持つ.

↖ (各点 $t \in T$) + (Automorphism)
 ↘ 局所的には $[\mathcal{Y}/G]$ の形.

$$\exists \mathcal{M}_X^{H-\mathrm{ss}}(\nu) \subset \exists \mathcal{M}_X^{H-\mathrm{ss}}(\nu) \subset \mathcal{M}_X(\nu).$$

Def

Artin stack $\mathcal{M}$ に対し. 代数空間 M と quasi-compact morphism

$$\pi: \mathcal{M} \rightarrow M$$

の組 (M, π) であって. π が π_* を $\mathcal{M}$ の Good moduli space とする:

(i) $\pi_*: \mathrm{QCoh}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathrm{QCoh}(M)$ は 完全.

(ii) $\mathcal{O}_M \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ は 同型.

特に, $\mathcal{M}_x^{H-st}(u)$ に対して H -polystable sheaves を分類する

実際, $Sp-u$ $\mathcal{M}_x^{H-st}(u)$ 存在する, 下記の Cartesian diagram あり:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_x^{H-st}(u) & \hookrightarrow & \mathcal{M}_x^{H-st}(u) \\
 \downarrow & \square & \downarrow \\
 \exists \mathcal{M}_x^{H-st}(u) & \xrightarrow{\text{open}} & \mathcal{M}_x^{H-st}(u)
 \end{array}$$

$\mathbb{C}^*$ -gerbe
($\text{Aut}(E) = \mathbb{C}^*$)

Def 1.4

(i) $\mathcal{M}_x^{H-st}$ 及び $\mathcal{M}_x^{H-st}$ はの自然な $\mathbb{C}^*$ -gerbe である. $\rightarrow$ あり

$$\mathcal{M}_x^{H-st}(u) \cong \mathcal{M}_x^{H-st}(u) \times \mathbb{B}\mathbb{C}^*$$

あり成立. $\mathcal{M}_x^{H-st}$ は 良モジュライ空間 (fine moduli space) である

(ii) $\mathcal{M}_x^{H-st}(u) = \mathcal{M}_x^{H-st}(u)$ あり成立.

$\mathcal{M}_x^{H-st}(u)$ は $st = st$ 条件 である.

§1.2. Deformation - Obstruction Theory (参考: 上原・田中 §1.5)

($X, \mathcal{O}_X(t), H$ は §1.1 と同様.)

$p \in M_x^{H-\text{st}}(U)$ に対し, X 上の H -安定層 E が対応する点がある.

$$p = [E] \in M_x^{H-\text{st}}(U).$$

このとき,

$$T_{[E]} M_x^{H-\text{st}}(U) \cong \left\{ (E, \phi) \mid \begin{array}{l} E \in \text{Coh}(X \times \text{Spec}(\mathbb{C}[t]/(t^2))) \text{ は } \mathbb{C}[t]/(t^2)\text{-平坦} \\ \phi: E|_{X \times \text{pt}} \xrightarrow{\sim} E \end{array} \right\} / \sim$$

Prop (上原・田中 Prop 5.15)

線形空間である.

$$T_{[E]} M_x^{H-\text{st}}(U) \cong \text{Ext}^1(E, E).$$

(~) $(E, \phi) \in T_{[E]} M_x^{H-\text{st}}(U)$ である.

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{t} \mathcal{O}_X[t]/t^2 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

$$\otimes E \quad 0 \rightarrow E \xrightarrow{t} E \rightarrow E \rightarrow 0$$

これは $\text{Ext}^1(E, E)$ の元を定める.

逆に $\xi \in \text{Ext}^1(E, E)$ に対応.

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E \rightarrow 0$$

を構成する.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{v} & E & \xrightarrow{u} & E \\ & \searrow \quad \quad \nearrow & & & \\ & & t & & \end{array} \quad t^2 = 0 \quad \text{かつ}$$

$$E \in \text{Coh}(X \times \text{Spec}(\mathbb{C}[t]/(t^2))).$$

□

$\text{Art} : \mathbb{C} \text{ 上有限次元 Artin 局所環の族}$

$\varphi : R' \rightarrow R$; Art における全射

$\mathfrak{m}' \subset R'$; 極大 ideal.

$\ker(\varphi) \cdot \mathfrak{m}' = 0$ と仮定. $\varphi \in$ 小拡大 (small extension) と呼ぶ.

($\varphi \in \ker(\varphi)$ は $R'/\mathfrak{m}' \cong \mathbb{C}$ - vec. sp.).

Prop (^{上原田} Prop 5.2)

$\varphi : R' \rightarrow R$ $\in$ 小拡大.

$I = \ker(\varphi)$, $E \in \text{Coh}(X \times \text{Spec}(R))$, E は R 上平坦 とする.

このとき. 障害類 (obstruction class) と呼ばれる

$$o(E) \in \text{Ext}_X^1(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$$

が存在して.

$o(E) = 0$ $\Leftrightarrow$ E から $E' \in \text{Coh}(X \times \text{Spec}(R'))$ へ R' 上平坦
拡大に拡張できる.

さらにこの場合, E の拡張となる E' の集合には

$\text{Ext}_X^1(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$ の自由かつ推移的かつ作用がある.

2.2. Prop により. $M_X^{\text{H-S}}(n)$ は局所的に $\text{Ext}_X^1(E, E)$ の中の

$\dim \text{Ext}_X^2(E, E)$ 本の方程式系の零点集合 となす.

より、 $M_X^{H-S}(u)$ の解析的閉部分集合 $[E] \in V \subset M_X^{H-S}(u)$ と

$0 \in U \subset \text{Ext}^1(E, E)$ が存在し、富田写像

$$k: U \longrightarrow \text{Ext}_X^1(E, E)$$

が存在し $V \cong k^{-1}(0)$ となる。

6.2. $\mathcal{M}_X$ の $[E]$ の近くにおける $M_X^{H-S}(u)$ の 仮想次元 (virtual dimension) を

$$\text{vir. dim}_{[E]} M_X^{H-S}(u) := \dim \text{Ext}_X^1(E, E) - \dim \text{Ext}_X^2(E, E)$$

と定める。

上述の虚形理論により “仮想次元” を逐次証明し、次の完全障害理論を用いる：

Def 1.5 (上及 Ref 12.3)

$\mathbb{C}$ 上有限スキーム M 上の 完全障害理論 (perfect obstruction theory)

とは、 $\mathcal{E}^\bullet$ と $(\mathcal{E}^\bullet, \phi)$

$$\phi: \mathcal{E}^\bullet \longrightarrow \tau_{\geq -1} \mathbb{L}_M \quad \text{in } D^b(\text{Coh}(M))$$

が存在し、次の条件を満たす：

- ・ $\mathcal{E}^\bullet$ は M 上の完全複体 (局所的に $\text{Coh}(U)$ の複体 $(\mathcal{E}^{-1} \rightarrow \mathcal{E}^0)$ と同型) $\mathcal{H}^i(\mathcal{E}^\bullet) = 0$ for $i \neq 0, -1$.
- ・ $\mathcal{H}^0(\phi)$ は同型、 $\mathcal{H}^{-1}(\phi)$ は全射。

ここで, $\tau_{\geq -1} \mathbb{L}_M$ は truncated cotangent complex.

特に以下では次のような場合を考える:

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\text{open}} & M & \xrightarrow{\text{closed}} & A, \\ I \subset \mathcal{O}_A & ; & U \text{ の定数 ideal} & & \end{array}$$

ce.

$$\tau_{\geq -1} \mathbb{L}_M|_U = (\overset{-1}{I/I^2} \rightarrow \overset{0}{\Omega_A|_U})$$

($\tau_{\geq -1} \mathbb{L}_M$ は $M \hookrightarrow A$ の方向に依存しない).

Rem 1.6.

$M := M_X^{\text{H-st}}(U)$ とし, $\phi: E^\bullet \rightarrow \tau_{\geq -1} \mathbb{L}_M$ への完全同型理論として
与えられている.

$$\mathcal{H}^0(E^\bullet|_{[E]}) = T_{[E]} M = \text{Ext}_X^1(E, E), \quad ([E] \in M_X^{\text{H-st}}(U))$$

$$\mathcal{H}^1(E^\bullet|_{[E]}) = \text{Ext}_X^2(E, E)$$

と好子.

例

A : 滑らかな $\mathbb{C}$ 上有限スキーム.

$V \rightarrow A$: ベクトル束.

$s: A \rightarrow V$: 切断.

$\mathcal{U} := (s=0)$, $I \subset \mathcal{U}$ の ideal 層 として.

$$s: V^\vee \rightarrow I \subset \mathcal{O}_A, \quad \mathcal{O}_{\mathcal{U}} = \mathcal{O}_A/I.$$

次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} V^\vee|_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \Omega_A|_{\mathcal{U}} \\ s|_{\mathcal{U}} \downarrow & \square & \downarrow \text{id} \\ \mathcal{U}/I^2 & \longrightarrow & \Omega_A|_{\mathcal{U}} \end{array} \quad (1.68)$$

が存在し, $\mathcal{E} := (V^\vee|_{\mathcal{U}} \rightarrow \Omega_A|_{\mathcal{U}})$ に対して, $\mathcal{U}$ 上の
完全障害理論 として得る.

Rem 1.7.

スキーム上の完全障害理論は, 局所的には (1.12) の形に書ける.

例, (1.13) の設定で, U の A における法錐 (normal cone)

$$C_{U/A} = \operatorname{Spec}_U \left(\bigoplus_{k \geq 0} I^k / I^{k+1} \right) \rightarrow U$$

を考えると, $C_{U/A}$ は U 上の $\dim A$ の Affine 錐
束, $V|_U$ の 内部錐.

→ Chow 群.

ゆえに, $[C_{U/A}] \in A_{\dim A}(V|_U)$ を得る.

$0: U \rightarrow V|_U$: ゼロ切断, $0^!$ は Gysin pull-back である.

$$e(V, \mathbb{A}^1) := 0^! [C_{U/A}] \in A_{\dim A - \operatorname{rk}(V)}(U)$$

と定めた. これは 局所オイler類 (localized Euler class) である.

$e(V, \mathbb{A}^1)$ を 局所化することで, 仮想オイler を得る:

Thm 1.1

完全降零理論 $\phi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ かつ $\operatorname{rk} \mathcal{E} = n$ とする.

仮想オイler $[M]^{\operatorname{vir}} \in A_{\dim}(M)$ かつ, $\mathcal{E}, \phi$ の

表の方により ϕ が 存在する. ($\dim := \operatorname{rk}(\mathcal{E})$)