非可換ホッジ理論/ Hitchin 可積分系入門

セシル☆@sesiru8

コンパクトな非特異代数曲線 Σ について, その上の半安定ベクトル束のモジュライ空間 $\mathcal{M}_\Sigma$ を考える．このモジュライ空間そのものでなく, 余接束 $T^*\mathcal{M}_\Sigma$ を見ると自然な代数的完全可積分系の構造が入っていることが示されている．また, この余接束がパラメトライズしているものを「Higgs 束」という．余接束をコンパクト化したところまで考えることで, 元のベクトル束の安定性を緩めた「(半) 安定 Higgs 束」が定義される．これらのモジュライ空間が存在し, その可積分系構造を Hitchin 可積分系という.

「Higgs 束」はベクトル束 E と Higgs 場 $\theta \in H^0(\Sigma, \mathrm{End}E \otimes \omega_\Sigma)$ と呼ばれる要素のペアである．Higgs 束は主に行列の道具を使って調べることができる．具体的には, Hitchin 可積分系から Higgs 場の特性多項式のなす空間に写像が構成でき, 各ファイバーは特性多項式が定める代数曲線のヤコビ多様体になっている．これは固有値と固有ベクトルの族と見做すことができる。

本講演では代数幾何学の基礎知識を仮定して, 上記の Hitchin 可積分系および非可換ホッジ理論の入門的な話をする予定である.

1　シンプレクティック幾何学

1.1　シンプレクティック構造

定義 1.1. 実 $2n$ 次元多様体 M 上の**シンプレクティック構造**とは, 非退化な 2 次微分形式 ω であって, $d\omega = 0$ を満たすもののことである．多様体とシンプレクティック構造の組 (M, ω) のことを**シンプレクティック多様体**という.

ここで ω が非退化であるとは, 任意の接ベクトル X に対して $\omega(X, Y) = 0$ ならば $Y = 0$ となることである.

例 1.2. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{2n}$ はシンプレクティック多様体である．具体的には, 座標

を $(p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n)$ とおいたとき, シンプレクティック構造が $\omega=\sum dp_i\wedge dq_i$ によって与えられる.

例 1.3. 任意の多様体 X について, 余接束 $M:=T^*X$ は自然なシンプレクティック構造を持つ. $(U,x_1,\dots,x_n)$ を X の座標, $(T^*U,x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n)$ を T^*X の座標とする. このとき, T^*X 上の 1-形式 α を $\alpha:=\sum\xi_i dx_i$ として定義する. これは局所座標の取り方によらない. この α を用いて, T^*X 上の 2-形式 $\omega=-d\alpha=\sum dx_i\wedge d\xi_i$ を定義する. これは明らかに閉 2 次形式であり, シンプレクティック構造となる.

例 1.4. (余随伴軌道) 任意の Lie 群 G は, 随伴表現によって Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に作用し, ゆえに余随伴表現によって双対空間 $\mathfrak{g}^*$ にも作用する (注意 1.5). Kostant と Kirillov によれば, 任意の $\xi\in\mathfrak{g}^*$ に対し, 余随伴軌道

$$\mathcal{O}=G\xi\subset\mathfrak{g}^*$$

は自然なシンプレクティック構造を持つ. $\mathfrak{g}_\xi$ を ξ の stabilizer とする. つまり

$$\mathfrak{g}_\xi:=\{X\in\mathfrak{g}\mid \mathrm{ad}_X^*\,\xi=0\}=\{X\in\mathfrak{g}\mid\langle\xi,[X,Y]\rangle=0,\quad\forall Y\in\mathfrak{g}\}.$$

ここでの $\langle -,-\rangle$ は $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ との自然なペアリングを表す. このとき, $\mathcal{O}$ の ξ における接空間は $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\xi$ により与えられる.

さて各 $\xi\in\mathfrak{g}^*$ に対して, $\mathfrak{g}$ 上の交代線形形式を

$$\omega_\xi(X,Y)=\langle\xi,[X,Y]\rangle$$

として定義する. この ω_ξ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\xi$ 上の非退化 2 次形式を定める. また ω_ξ は $\mathcal{O}$ 上の非退化な閉 2-形式を定義する.

この余随伴軌道 $\mathcal{O}$ 上の 2-形式を**標準的シンプレクティック形式**という. または, **Kostant-kirillov シンプレクティック構造**などということもある. このようにして, 余随伴軌道はシンプレクティック多様体となり, 特に偶数次元である.

注意 1.5. 随伴作用などについて復習しておく.

G を単位元 e をもつ Lie 群とする. $\mathfrak{g}$ によりその接空間 T_eG を表す. 群はそれ自身の上に共役変換で作用する:

$$\forall g\in G,\ G\longrightarrow G\ ;\ h\mapsto ghg^{-1}.$$

これを e において微分することで**随伴作用 (adjoint action)**

$$\forall g\in G,\ \mathrm{Ad}_g:\ \mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}\ ;\ X\mapsto\mathrm{Ad}_g(X)$$

が得られる ($G \subset GL_n(\mathbb{R})$ のときは $\mathrm{Ad}_g(X) = gXg^{-1}$). これを写像

$$G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})\ ;\ g \mapsto \mathrm{Ad}_g$$

と考えることもできる. 今度はそれを e において微分すれば

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g})\ ;\ X \mapsto \mathrm{ad}_X$$

が得られる. このとき

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}\ ;\ (X, Y) \mapsto \mathrm{ad}_X(Y)$$

は $\mathfrak{g} = T_eG$ の Lie 括弧と一致し, $\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$ である.

ここで双対ベクトル空間 $\mathfrak{g}^*$ を考えよう. $g \in G$ に対し

$$\mathrm{Ad}_g^* :\ \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

を $\langle \mathrm{Ad}_g^*(\xi), X \rangle = \langle \xi, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X) \rangle$ で定義する. これは**余随伴作用 (coadjoint action)** と呼ばれる G の (左) 作用である. 先程と同様にして, 写像

$$G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}^*)\ ;\ g \mapsto \mathrm{Ad}_g^*$$

が得られ, これを e において微分すれば

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)\ ;\ X \mapsto \mathrm{ad}_X^*$$

が定まり,

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{ad}_X^* \xi, Y \rangle &= \langle \xi, \mathrm{ad}_{-X} Y \rangle \\ &= -\langle \xi, [X, Y] \rangle \end{aligned}$$

となる.

1.2 ハミルトニアン

定義 1.6. シンプレクティック多様体 (M, ω) 上の滑らかな関数 H に対して,

$$X_H \rfloor \omega = dH$$

により一意的に定まるベクトル場 X_H を**ハミルトンベクトル場**という. ここで $X_H \rfloor \omega := \iota_{X_H} \omega = \omega(X_H, -)$ である. このとき, 関数 H を**ハミルトニアン**という. また, ベクトル場 X_H は H に付随した微分方程式を定めるが, これを**ハミルトン系 (Hamiltonian system)** という.

M 上のベクトル場 v がハミルトンベクトル場であることと, 1-形式 $v\rfloor\omega$ が完全であることとは同値である. $v\rfloor\omega$ が閉形式であるとき, v は**局所ハミルトンベクトル場 (locally Hamiltonian)**, または**シンプレクティックベクトル場**という. これは, v による flow が ω を保つことと同値である. ($\because d\iota_v\omega = 0 \Rightarrow L_v\omega = d\iota_v\omega + \iota_v d\omega = 0.$)

1.3 ポアソン構造

対応 $H \mapsto X_H$ は層の間の写像

$$X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

を定める. さて $\mathfrak{X}(M)$ はベクトル場の Lie 括弧積により Lie 代数の構造を持つ. このとき, M 上のシンプレクティック構造により X が Lie 代数の間の射になるような $\mathcal{C}^\infty(M)$ の Lie 代数構造が定まる. このような $\mathcal{C}^\infty(M)$ 上の Lie 代数構造は**ポアソン括弧**とよばれ, 次のように表される:

$$\{f, g\} := \omega(X_g, X_f) = \langle \iota_{X_g}\omega, X_f\rangle = \langle dg, X_f\rangle = X_f g.$$

より一般に, 多様体 M 上のポアソン構造が次のように定義される.

定義 1.7. 多様体 M 上の**ポアソン括弧**とは,

$$\mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \ni (f, g) \mapsto \{f, g\} \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

であって, $\{\cdot, \cdot\}$ が Lie 代数であり, さらにライプニッツ則

$$\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$$

を満たすものである. このような構造を持つ多様体 M を**ポアソン多様体**とよぶ.

任意のポアソン多様体 M は自然な葉層構造を持ち, その各々の葉はシンプレクティック構造を持つ. これらの葉をそのポアソン多様体の**シンプレクティック葉 (symplectic leaf)** という. 特に M がシンプレクティック多様体のとき, そのポアソン多様体としてのシンプレクティック葉は M 全体となる.

例 1.8. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の余随伴軌道上の Kostant-Kirillov シンプレクティック構造は, 双対空間 $\mathfrak{g}^*$ 上のポアソン構造を定める. $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ について, $\xi \in \mathfrak{g}^*$ における微分 $d_\xi F$ を $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{**}$ の元と同一視する. このとき,

$$\{F, G\}(\xi) := \langle \xi, [d_\xi F, d_\xi G]\rangle$$

とおく. するとこれは $\mathfrak{g}^*$ 上のポアソン構造を定め, そのシンプレクティック葉は余随伴軌道となる.

2　可積分系

この節の議論はポアソン多様体についても行うことができるが, 簡単のためシンプレクティック多様体を用いる.

2.1　可積分系

歪対称性により $\{H, H\} = 0$ だから $\langle dH, X_H \rangle = 0$ であり, H は X_H の軌道に沿って一定である. 言い換えれば, ハミルトン系の解は H の等方面 (level) 上にとどまる. H が系の全エネルギーであるハミルトン力学では H は運動を通じて一定である.

この, 軌道に沿って一定にとどまる性質を持つ, すなわち $\langle df, X_H \rangle = 0$(あるいは $\{H, f\} = 0$) となる任意の函数 f は**第一積分 (first integral)** と呼ばれる.

定義 2.1. 多様体 M 上の函数の組 $\{f_1, \dots, f_k\}$ が**函数的に独立 (functionally independent)** であるとは, 稠密な開部分集合 $U \subset M$ が存在して, 任意の $p \in U$ に対して $(df_1)_p, \dots, (df_k)_p \in T_p^*M$ が線形独立であることをいう.

定義 2.2. 実 $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M, ω) 上のハミルトン系が函数的に独立で互いにポアソン可換, すなわち $\{H_i, H_j\} = 0$ であるような n 個の第一積分 $H_1, \dots, H_n$ を持つとき, **完全可積分系 (completely integrable system)** あるいは単に**可積分系 (integrable system)** であるという.

注意 2.3. H_i と H_j は可換なので, $\omega(X_{H_i}, X_{H_j}) = 0$ である. 実際, M の一般の点 x において X_{H_i} は接空間 T_xM の等方的部分空間 (isotropic subspace) を生成する. $\dim M = 2n$ なので, n は等方的部分空間の最大可能次元であり, 従って n は独立な第一積分の最大可能個数でもある. 例えば, 系のハミルトニアンは函数 H_i で生成される代数に属する.

定義 2.4. シンプレクティック多様体 (M, ω) の部分多様体 L が**ラグランジュ部分多様体 (Lagrangian submanifold)** であるとは, $\dim L = \frac{1}{2} \dim M$, $\omega|_L = 0$ が成り立つことをいう. また, ファイバー束 $\pi : M \to N$ が**ラグランジュファイバー束 (Lagrangian fibration)** であるとは, 各々のファイバーがラグランジュ部分多様体であるときをいう.

定理 2.5 (Liouville-Arnold の定理 1)**.** $((M,\omega),H)$ を実 $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M,ω) 上の完全可積分系とし, $F=(F_1,\dots,F_n):M\to\mathbb{R}^n$ を互いにポアソン可換かつ函数的に独立な H の第一積分とする. このとき, F の正則値の逆像のコンパクトな連結成分 L はトーラスと同相な M のラグランジュ部分多様体であり, その上のハミルトン流は適当な同一視 $L\simeq\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ の下で等速直線運動になる.

定理 2.6 (Liouville-Arnold の定理 2)**.** (M,ω) を実 $2n$ 次元のシンプレクティック多様体とし, $F:M\to B$ を連結でコンパクトなトーラス T^n によるラグランジュファイバー束とする. このとき B の点 b_0 の近傍 U と $T^n\times U$ から M の中への微分同相写像

$$\varphi:T^n\times U\to M;\ (\theta,I)\mapsto\varphi(\theta,I)$$

で次を満たすものが存在する.

(1) $\varphi(T^n\times\{b_0\})=F^{-1}(b_0)$,
(2) $\varphi^*\omega=\sum_{k=1}^n dI_k\wedge d\theta_k$,
(3) $F\circ\varphi(\theta,I)$ は $I=(I_1,\dots,I_n)\in U$ だけに依存する函数である.

変数 I と θ をそれぞれ**作用変数 (action variable)**, **角変数 (angle variable)** という.

2.2 代数的完全可積分系

定義 2.7. (M,ω) を滑らかなシンプレクティック代数多様体とする. 被約かつ既約な部分多様体 $Z\subset M$ がラグランジュ部分多様体であるとは, 一般の点 $z\in Z$ について接空間 $T_zZ\subset T_zM$ がラグランジュ部分多様体になっていることをいう.

定義 2.8. (M,ω) を滑らかなシンプレクティック代数多様体とし, B を滑らかな代数多様体とする. 平坦射 $H:M\to B$ は, 次の条件を満たすとき**代数的完全可積分系**であるという: M のコンパクト化 $\widetilde{M}$ と平坦で固有な射 $\tilde{H}:\widetilde{M}\to B$ が存在し, 図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr] \arrow[dr, "H"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \widetilde{M} \arrow[dl, "\tilde{H}"] \\ & B & \end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

が可換となり, B のある固有な閉部分多様体 Δ の補集合 $B\setminus\Delta$ 上において, $\tilde{H}$ はファイバーがアーベル多様体に同型であるようなラグランジュファイバー束である.

注意 2.9. 複素 g 次元アーベル多様体とは, 複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ に複素部分多様体として埋め込むことのできる g 次元複素トーラスのことをいう.

アーベル多様体の射影埋め込みを与える写像は, アーベル多様体上の直線束を何度かテンソルしたものを用いて構成できる. また, その座標はテータ函数を用いて表示することができる. このことにより, 原理的には代数的完全可積分系の解はテータ函数を用いて表すことができる. もちろん, 厳密解を求めることは一般には困難である.

3 スペクトル曲線とベクトル束

3.1 曲線上のベクトル束

種数 g のコンパクトな非特異代数曲線 Σ をひとつ取り固定する. この章では主に, 与えられた階数 r と次数 d を持つ Σ 上の安定 (半安定) ベクトル束のモジュライ空間を扱う. その前に, まずは Σ 上の「一般の」ベクトル束について考察しよう.

直線束からベクトル束を構成する方法のひとつに, 順像を用いるものがある: 非特異曲線 C のある因子 R で分岐した分岐 r 重被覆 $\pi : C \to \Sigma$ を考える. このとき, C 上の任意の直線束 $L \in \mathrm{Pic}(C)$ は, Σ 上の階数 r のベクトル束 $E := \pi_* L$ を定める. 順像の定義により開集合 $\mathcal{U} \subset \Sigma$ に対し, 階数 r の局所自由 $\mathcal{O}_\Sigma$-加群として

$$\Gamma(\mathcal{U}, \pi_* L) := \Gamma(\pi^{-1}\mathcal{U}, L)$$

と表わされる.

ベクトル束としての構造は, 分岐点を除いては分かりやすいものになっている. $\pi^{-1}(p)$ が互いに異なる r 点 $\{p_1, \ldots, p_r\}$ からなるとする. このとき $p \in \Sigma$ における E のファイバーは, L のファイバーの直和と自然に同型となる. つまり

$$E_p \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} L_{p_i}.$$

分岐点におけるファイバーは上記のように自然に分解することはないが, フィルトレーションの構造が入っている.

3.2 ベクトル束のモジュライ空間

例 3.1 (跳躍現象)**.** $g(C) > 0$ の代数曲線と, 分岐二重被覆写像 $\pi : C \to \mathbb{P}^1$ を考える. $\chi(L) = 0$, つまり $\deg(L) = g - 1$ のとき, $\deg(\pi_* L) = -2$ となる. このとき

$$l := h^0(C, L) = h^0(\mathbb{P}^1, \pi_* L)$$

とおくことで

$$\pi_* L \simeq \mathcal{O}(l-1) \oplus \mathcal{O}(-l-1)$$

を得る. このようなベクトル束について, 次のような煩わしい現象が起こる:

直線束 L を $\mathrm{Pic}^{g-1}(C)$ の元とみなし, その中で連続的に変化させることを考える. このとき $\pi_* L$ も同様に変化する. ここで,

$$\begin{aligned} &L_0 \in \Theta, \\ &L_t \notin \Theta, \ t \neq 0, \end{aligned}$$

となるような直線束の 1-パラメータ族 $\{L_t\}_{t \in T}$ を考える. ここで Θ はテータ因子を表す. すると, 一般の t については $\pi_* L \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ だが, $t = 0$ のときには $\pi_* L \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2)$ となってしまう. このような跳躍現象は r 重被覆写像を考えることにより, 階数 r のベクトル束の場合にも起こりうる.

例 3.1 により, 曲線上の「一般の」ベクトル束を分類するようなモジュライ空間であって, ハウスドルフ性などといった良い性質を持つものを構成するには, 全てのベクトル束を一度に考えてはならないことが分かる. この問題をどのように克服するかというと, (半) 安定性条件という概念を導入し, その条件を満たすベクトル束だけを考えるのである.

定義 3.2. ベクトル束 E に対し, 次数と階数の比

$$\mu(E) := \frac{\deg E}{\operatorname{rank} E}$$

を**勾配 (slope)** という. ベクトル束 E は全ての真部分束 $F \subset E$ に対して

$$\mu(F) < \mu(E)$$

が成立するとき, **安定 (stable)** であるといい, 等号を許した $\mu(F) \leq \mu(E)$ が成立するとき, **半安定 (semi-stable)** であるという.

任意の半安定ベクトル束 E は次のような部分ベクトル束の列を持つ.

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_e = E$$

であって, $F_1, F_2/F_1, F_3/F_2, \ldots, F_e/F_{e-1}$ が全て安定ベクトル束であり,

$$\mu(F_1) = \mu(F_2/F_1) = \cdots = \mu(F_e/F_{e-1}) = \mu(E)$$

を満たす. さらに $\operatorname{gr} E = F_1 \oplus F_2/F_1 \oplus \cdots \oplus F_e/F_{e-1}$ は E の同型類と一対一に対応する.

定理 3.3. 以下の性質を満たすような, Σ 上のベクトル束のモジュライ空間 $\mathcal{U}^s_\Sigma(r,d) \subset \mathcal{U}_\Sigma(r,d)$ が存在する:

(1) $\mathcal{U}^s_\Sigma(r,d)$ は滑らかな代数多様体であり, その各点は Σ 上の階数が r で次数が d の安定ベクトル束の同型類に対応する. 特に $\mathcal{U}^s_\Sigma(r,d)$ は $\mathcal{U}_\Sigma(r,d)$ の開集合である.

(2) $\mathcal{U}_\Sigma(r,d)$ は射影的代数多様体であり, その各点は Σ 上の階数が r で次数が d の半安定ベクトル束の同型類に対応する. ここでの同型対応は, 同型な次数付けを持つとき, つまり $\operatorname{gr} E_1 \simeq \operatorname{gr} E_2$ を満たすときをいう.

(3) $\mathcal{U}^s_\Sigma(r,d)$ と $\mathcal{U}_\Sigma(r,d)$ はともに**粗モジュライ空間 (coarse moduli space)** である.

$\mathcal{U}^s := \mathcal{U}^s_\Sigma(r,d), \mathcal{U} := \mathcal{U}_\Sigma(r,d)$ とおく. 変形理論により, 次のことが分かる.

補題 3.4. $g(\Sigma) \geq 2$ とする. このとき

(1) $\dim \mathcal{U} = 1 + r^2(g-1)$ であり, $\mathcal{U}^s$ は $\mathcal{U}$ の稠密な開集合である.

(2) 安定ベクトル束 E は**単純 (simple)** である. つまり E の自己準同型写像はスカラー倍写像しか存在しない.

(3) 安定ベクトル束の同型類は $\mathcal{U}$ の非特異点に対応する.

(4) $\mathcal{U}^s$ の点において, 次の標準的な同型が存在する:

$$\begin{aligned} T_E\mathcal{U}^s &\simeq H^1(\operatorname{End} E), \\ T^*_E\mathcal{U}^s &\simeq H^0(\operatorname{End} E \otimes \omega_\Sigma). \end{aligned}$$

3.3 スペクトル曲線と Hitchin 可積分系

定理 3.5. 半安定ベクトル束のモジュライ空間の余接束には, 自然に代数的完全可積分系の構造が入る. この可積分系を **Hitchin 可積分系 (Hitchin integrable system)**, または **Hichin 系 (Hitchin system)** という.

安定ベクトル束のモジュライ空間の余接束 $T^*\mathcal{U}^s_\Sigma(r,d)$ の全空間は, 次のような組 (E,φ) のなす空間である:

(1) E は Σ 上の階数 r で次数 d の安定ベクトル束.

(2) $\varphi \in H^1(\Sigma, \mathrm{End}\, E)^* \simeq H^0(\Sigma, \mathrm{End}\, E \otimes \omega_\Sigma)$, つまり微分 1-形式に値をもつ E の自己準同型写像.

このような組 (E,φ) を **Higgs 束**という.

ここではより一般に, 次のような組 (E,φ) を考えよう:

(1) E は Σ 上の階数 r で次数 d の安定ベクトル束.

(2) $\varphi \in \mathrm{Hom}(E, E\otimes K) \simeq H^0(\Sigma, \mathrm{End}\, E \otimes K)$, ここで K は Σ 上の直線束.

このような組 (E,φ) を **K-twisted Higgs 束**という. (E,φ) の特性多項式 $\mathrm{char}(\varphi)$ の i 次の係数 b_i は, K^{-1} 上の i 次斉次多項式である. つまり $H^0(\Sigma, K^{\otimes i})$ の元であって, 実際 $b_i = (-1)^i \cdot \mathrm{tr}(\wedge^i \varphi)$ である.

Hitchin 系 (つまり $K = \omega_\Sigma$ の場合) のハミルトニアン

$$H : T^*\mathcal{U}_\Sigma(r,d) \longrightarrow B_\omega := \bigoplus_{i=1}^{r} H^0(\Sigma, \omega_\Sigma^{\otimes i})$$

は, 特性多項式の係数を対応させることで得られる. この H を **Hitchin 写像**という. この写像 H のファイバーは, 特性多項式に付随した代数曲線のヤコビ多様体であることが知られている.

一般の直線束 K に値をもつ場合に戻ろう. $B_\omega := \oplus_{i=1}^r H^0(\Sigma, \omega_\Sigma^{\otimes i})$ 内の特性多項式 $\mathrm{char}(\varphi) = y^r - \mathrm{tr}(\varphi) y^{r-1} + \cdots + (-1)^r \det\varphi$ は K から $K^{\otimes r}$ への射を定める. 多項式 $P \in B_\omega$ に対応する射が定める $K^{\otimes r}$ 内のゼロ切断の引き戻し C を**スペクトル曲線 (spectral curve)** という. 多項式 P が (E,φ) の特性多項式の場合, $\pi : C \to \Sigma$ のファイバーは φ の固有値となる. もし $K^{\otimes r}$ のセクションが多重零点を持たないならば (例: 非常に豊富ならば), 一般のスペクトル曲線は滑らかとなる.

命題 3.6. C を被約で既約なスペクトル曲線とする. このとき,

(1) 対応するスペクトル曲線が C であるような組 (E,φ) の同型類.

(2) C 上の可逆層 L の同型類.

の間には全単射写像が存在する (この対応を **BNR 対応**という).

Proof. (1) のような組 (E, φ) について, φ の固有ベクトルにより C 上の可逆層 L が得られる. 逆に, スペクトル曲線 $\pi : C \to \Sigma$ とその上の可逆層 L が与えられたとする. このとき, 組 $(\pi_* L, \pi_*(\otimes y))$ は, Σ 上の階数 r のベクトル束と K に値をもつ E の自己準同型からなる. $\square$

Hitchin 写像 $H : T^* \mathcal{U}^s_\Sigma(r, d) \to B_\omega$ について, 特性多項式 $b \in B_\omega$ 上のファイバーはヤコビ多様体 $Jac^{d+r(1-g_\Sigma)+g_C-1}(C)$ の開集合となり, それは順像を施すことにより Σ 上の安定ベクトル束となるような可逆層 L の同型類からなる. これらの構成は Hichin 系 (つまり $K = \omega_\Sigma$ の場合) に限らず, 一般の直線束 K の場合についても同様に行うことができる.

ファイバーとしてヤコビ多様体 $Jac^{d+r(1-g_\Sigma)+g_C-1}(C)$ 全体を得るためには, 安定性の定義を緩める必要がある.

定義 3.7. (E, φ) を K-twisted Higgs 束とする.

(1) E の φ-不変部分束 F と, φ を F 上に制限して得られる ψ の組 (F, ψ) を **Higgs 部分束**という.

(2) (E, φ) は, 全ての Higgs 部分束 (F, ψ) に対して

$$\frac{\deg F}{\operatorname{rank} F} < \frac{\deg E}{\operatorname{rank} E}$$

が成り立つとき, **安定 Higgs 束**であるという. 等号を許した $\mu(F) \leq \mu(E)$ が成り立つとき**半安定 Higgs 束**であるという.

ベクトル束の場合と同様に, 半安定な (K-twisted) Higgs 束についても次数付けによる同値関係を定めることができる.

定理 3.8. 半安定 K-twisted Higgs 束の同型類をパラメトライズする粗モジュライ空間 $\mathrm{Higgs}_K := \mathrm{Higgs}_\Sigma(r, d, K)$ が存在する.

特性多項式の係数を対応させる写像

$$H : \mathrm{Higgs}_K \longrightarrow B_K := \bigoplus_{i=1}^{r} H^0(\Sigma, K^{\otimes i})$$

は代数的固有射である.

定義 3.7 のような安定性の定義を考える意義として, 非可換ホッジ理論による次の定理が挙げられる:

定理 3.9. 次の 2 つのモジュライ空間の間には, (実解析的な) 微分同相写像が存在する.

(1) 基本群 $\pi_1(\Sigma)$ の半単純な $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ 表現の共役類のなすモジュライ空間.

(2) 階数 r で次数 0 の半安定 Higgs 束 (E,φ) のなすモジュライ空間.

Hitchin 系の場合, $T^*\mathcal{U}^s_\Sigma(r,d)$ 上のシンプレクティック構造が安定 Higgs 束のモジュライ空間まで延びる. このことによって, ファイバーとしてスペクトル曲線のヤコビ多様体が現れるような可積分系 $H : \mathrm{Higgs}_\Sigma(r,d,\omega_\Sigma) \to B_\omega$ が得られる.

定理 3.10. Σ を種数 g の滑らかな代数曲線とし, D を Σ 上の有効因子とする. $[\omega(D)]^{\otimes r}$ は非常に豊富であるとし, $g=0$ の場合はさらに $\deg(D) > \max(2,\rho)$ と仮定する. ここで $0 \le \rho < r$ は $d \bmod r$ とする. このとき, 次が成立する:

(1) 階数 r で次数 d の安定 $\omega(D)$-twisted Higgs 束のモジュライ空間 $\mathrm{Higgs}^s_\Sigma(r,d,\omega(D))$ には, $r^2(2g-2+\deg(D))+1+\epsilon_{D=0}$ 次元の滑らかな部分スキーム $\mathrm{Higgs}^{sm}_\Sigma(r,d,\omega(D))$ が存在する. ここで $D=0$ のとき $\epsilon_{D=0}=1$, $D>0$ のとき $\epsilon_{D=0}=0$ とする. $\mathrm{Higgs}^{sm}_\Sigma(r,d,\omega(D))$ は, 被約で既約なスペクトル曲線に対応する Higgs 束を含むものとしては唯一の部分スキームである.

(2) $\mathrm{Higgs}^{sm}_\Sigma(r,d,\omega(D))$ には標準的なポアソン構造が入る.

(3) 特性多項式による写像 $H : \mathrm{Higgs}^{sm}_\Sigma(r,d,\omega(D)) \to B_{\omega(D)}$ は, 代数的完全可積分ハミルトン系である. 一般のラグランジュファイバーは, 種数が $r^2(g-1)+1+(\deg D)(\frac{r(r-1)}{2})$ の滑らかなスペクトル曲線のヤコビ多様体である.

4 応用 1: 楕円体上の測地流

4.1 多項式行列

$\Sigma = \mathbb{P}^1$ の場合, 定理 3.10 を具体的に書き下すことができる. 直線束 K が $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ であるとし, モジュライ空間 $\mathrm{Higgs}_K := \mathrm{Higgs}^{sm}_K(-r,r)$ を考える. この空間は, 階数 r で次数が $-r$ のベクトル束 E と, K に値をもつ E の自己準同型 $\varphi : E \to E \otimes K$ からなる組 (E,φ) をパラメトライズしている.

さて $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ の座標として x をとる. このとき, 特性多項式のなすベクトル空間 B_K は次のように表わせる:

$$\{P(x,y) = y^r + b_1(x)y^{r-1} + \cdots + b_r(x) \mid b_i(x) \text{ は次数 } i\cdot d \text{ 以下の } x \text{ に関する多項式}\}.$$

直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d\cdot\infty)$ をアフィン直線 $\mathbb{P}^1\setminus\{\infty\}$ 上に制限したものは, アフィン平面と同型になる．この同型によって, 多項式 $P(x,y)$ をアフィン平面曲線のスペクトル曲線の定義多項式と見なすことができる．

$B^0\subset B_K$ を滑らかなスペクトル曲線のなす部分集合とする．また, 滑らかなスペクトル曲線を持ち, $E\simeq E_0:=\oplus^r\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ となるような組 (E,φ) をパラメトライズする Higgs_K の部分集合を $Q:=Q_r(d)$ で表す．$\mathrm{Higgs}_K^{sm}(r,-r)$ は既約であり, E_0 は $\mathbb{P}^1$ 上で半安定な階数 r のベクトル束として唯一つのもの, かつ半安定性は開条件であるため, Q は Higgs_K の稠密なザリスキ開集合である．

$\mathrm{End}\,E_0\simeq\mathfrak{gl}_r(\mathbb{C})\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ なので, Q の各点は $\varphi\in M_r(d):=H^0(\mathbb{P}^1,\mathfrak{gl}_r(\mathbb{C})\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d\cdot\infty))$ により代表される．この元はつまり, 各成分が d 次以下の多項式であるような $r\times r$ 行列である．$M_r(d)$ 内の B^0 の引き戻しを $M_r^0(d)$ とする．部分集合 $Q\subset\mathrm{Higgs}_K$ は, $M_r^0(d)$ を $PGL_r(\mathbb{C})$ の共役作用で割った空間として得られる．

上記の設定で, 定理 3.10 は次のように表わされる．

定理 4.1. (1) $M_r^0(d)$ を $PGL_r(\mathbb{C})$ の共役作用で割って得られる空間 Q は, 滑らかな代数多様体である．

(2) スペクトル曲線 C の定義多項式に対応する点の, $H:Q\to B^0$ によるファイバーは $Jac_C^{g-1}\setminus\Theta$ である．ここで g は C の種数であり, Θ はテータ因子を表す．

(3) $\mathbb{P}^1$ 上の $d+2$ 点 $a_1,\dots,a_{d+2}$ の取り方毎に Q 上のポアソン構造が定まる．

4.2 特別な場合のヤコビ多様体の定義多項式

前節の内容よりさらに単純化した場合を考えよう．

補題 4.2. $A=A_dx^d+\cdots+A_1x+A_0$ を, 行列成分が d 次以下の多項式であり $\mathrm{tr}(A)=0$ となる $r\times r$ 行列とする．さらに A が次の条件を満たすとする:

(1) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d\cdot\infty)$ の全空間内のスペクトル曲線が被約で既約かつ $\infty\in\mathbb{P}^1$ のファイバー上において滑らか.

(2) A_d が冪零行列.

このとき, A を次の形の行列 $A'=x^d\cdot J+\sum_{i=0}^{d-1}A_i'x^i$ と共役にするような $PGL_r(\mathbb{C})$ の元 g_0 が唯一つ存在する:

$$A' = x^d \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + x^{d-1} \begin{pmatrix} * & \cdots & & * & \beta_r \\ * & \cdots & & * & 0 \\ * & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & & * & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{d-2} x^i A'_i. \quad (4.2.1)$$

ここで $(-1)^{r+1}\beta_r$ は A の行列式 $b_r(x)$ の x^{dr-1} の係数.

r^2+r-1 個の方程式 (4.2.1) で定義される行列による $M_d^0(r)$ の部分代数多様体を $\tilde{N}$ とする. 先頭項が冪零行列であるような多項式行列の同型類なす集合が N であった. $\tilde{N}$ は主 $PGL_r(\mathbb{C})$ 束 $M_r^0(d) \to Q$ の N 上のセクションとなる. 定理 4.1(3) により, Q にはポアソン構造が $D := a_1 + \cdots + a_{d+2}$ 毎に定まるのであった. N はこれらのポアソン構造に関してポアソン部分代数多様体になる.

滑らかなスペクトル曲線 C に対応する, $B_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)}$ の点としての特性多項式 $P(x,y) = y^r + b_1(x)y^{r-1} + \cdots + b_r(x)$ であって, $\deg b_i(x) \le id-1, \deg b_r(x) = rd-1$ かつ先頭項が $(-1)^{r+1}\beta_r$ であるようなものを選ぶ. 定理 4.1 によれば, $Jac_C^{g-1} \setminus \Theta$ と同型な $M_r(d)$ の部分代数多様体の定義式が

(a) $A_d = J$,

(b) A_{d-1} の r 列目が ${}^t(\beta_r \ 0 \ \cdots \ 0)$ である,

(c) $\mathrm{char}\,(A(x)) = P(x,y)$,

によって与えられる. ここで J は, 式 (4.2.1) における $A'(x)$ の先頭項の係数として表れている冪零正則行列である.

4.3 2×2 多項式行列と楕円体上の測地流

次の形の多項式 $P(x,y) \in B^0_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d\cdot\infty)}$ を考える:

(1) $P(x,y) = y^2 - f(x)$, ここで $f(x)$ は次数 $2d-1$ のモニック多項式.

この $P(x,y)$ に対応するスペクトル曲線 C は種数 $g = d-1$ の超楕円曲線で, $x=\infty$ において分岐している. 定理 3.10 により, ファイバー

$$H^{-1}(P(x,y)) = \left\{ \begin{pmatrix} V & U \\ W & -V \end{pmatrix} \mid V^2 + UW = f(x) \right\} / PGL_2(\mathbb{C})$$

はヤコビ多様体の開集合 $Jac_C^{g-1} \setminus \Theta$ と同型である.

この場合, 補題 4.2 は次のように述べられる (f をモニック多項式としてとってあるので, $\beta_r = 1$ となる).

補題 4.3. $H^{-1}(P(x,y)) \simeq Jac_C^{g-1} \setminus \Theta$ 内の行列 $\begin{pmatrix} V & U \\ W & -V \end{pmatrix}$ の $PGL_2(\mathbb{C})$ 軌道は, 条件

(2) W が次数 d のモニック多項式, U が次数 $d-1$ のモニック多項式, $\deg V \leq d-2$

を満たす唯一つの行列を含む.

言い換えれば, 条件 (2) と

(3) $V^2 + UW = f(x)$

は $M_2(d)$ 内のトレースゼロ行列たちのなす部分集合のアフィン部分代数多様体としての $Jac_C^{g-1} \setminus \Theta$ の定義式である.

以上の準備の下, 楕円体上の測地流を Hitchin 可積分系を用いて表してみよう.

4.3.1 Step:1

d 個の点 $a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ が互いに異なるとし, $a_{d+1} = a_{d+2} = \infty$ であるとする. 条件

$$f(a_i) = 0,\ 1 \leq i \leq d,\ \deg f = 2d-1,\ \text{かつ}\ f\ \text{はモニック多項式}$$

を満たす $f(x)$ を用いて表される特性多項式 $P(x,y) = y^2 - f(x)$ のなす部分集合上のシンプレクティック葉を $X \subset Q$ とする. X に含まれる行列のスペクトル曲線は種数 $d-1$ であり, $d+2$ 個の固定点 $a_1, \cdots, a_d, \infty$ と g 個の点で分岐する.

4.3.2 Step:2

$F(x)$ を $\frac{F(x)\,dx}{\prod_{i=1}^{d}(x-a_i)}$ へ移すような同型写像 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d \cdot \infty) \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathbb{P}^1}(\sum_{i=1}^{d} a_i + 2 \cdot \infty)$ により, 行列 $\begin{pmatrix} V(x) & U(x) \\ W(x) & -V(x) \end{pmatrix}$ は有理 1-形式を成分にもつ行列 φ へ移る. この φ の留数行列は次を満たす:

(i) $R_\infty = \mathrm{Res}_\infty(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ s & 0 \end{pmatrix},\ \ s \in \mathbb{C},$

(ii) $R_i = \mathrm{Res}_{a_i}(\varphi) = \begin{pmatrix} V(a_i) & U(a_i) \\ W(a_i) & -V(a_i) \end{pmatrix} \frac{1}{\prod_{j=1, j\neq i}^{d}(a_i - a_j)}.$

留数行列 R_i は冪零な 2×2 行列であり, 留数定理により $R_\infty = -\sum_{i=1}^d R_i$ を満たす. $\mathcal{N}$ を $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ の冪零軌道とする. このとき, 留数写像

$$\mathrm{Res} : X \to \mathcal{N}^d \ ; \ \varphi \mapsto (R_1, \cdots, R_d)$$

により, Q のシンプレクティック葉 X は $\mathcal{N}^d$ に埋め込まれる.

4.3.3 Step:3

$\mathbb{C}^2$ 上にシンプレクティック形式 $2dx \wedge dy$ を定める. 写像

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0\} \to \mathcal{N} \ ; \ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} xy & -x^2 \\ y^2 & -xy \end{pmatrix}$$

は $\mathcal{N}$ 上の $SL_2(\mathbb{C})$ 同変な二重被覆シンプレクティック写像である. この写像を用いて 2^d 重被覆写像 $\tau : (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\})^d \to \mathcal{N}^d$ を得る. 留数定理により, X の像 $\mathrm{Res}\,(X) \subset \mathcal{N}^d$ は

$$\left\{ (\bar{x}, \bar{y}) = ((x_1,y_1), \cdots, (x_d,y_d)) \mid \sum x_i y_i = 0, \text{ かつ } \sum_{i=1}^d x_i^2 = 1 \right\}$$

により被覆される. この集合はまさに球面 $S \subset \mathbb{C}^d$ の接束 $TS \subset (\mathbb{C}^2)^d$ である.

注意 4.4. 楕円体の測地流が, 球面 S の接束 TS 上のハミルトンベクトル場として表せる, という事実がある. 今後書き足す予定.

5 応用 2: KP 階層

6 応用 3: 幾何学的ラングランズ対応

参考文献

[1] R. Donagi, E. Markman, *Spectral covers, algebraically completely integrable, Hamiltonian systems, and moduli of bundles.* Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993), 1-119, Lecture Notes in Math., 1620, Fond. CIME/CIME Found. Subser., Springer, Berlin, 1996.