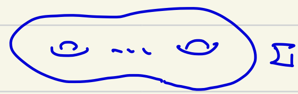
§1. ベクトル束のモジュライ空間

§2. Hitchin系 & スペクトル曲線.

§3. 非可換ホッジ理論 $/\mathbb{C}$

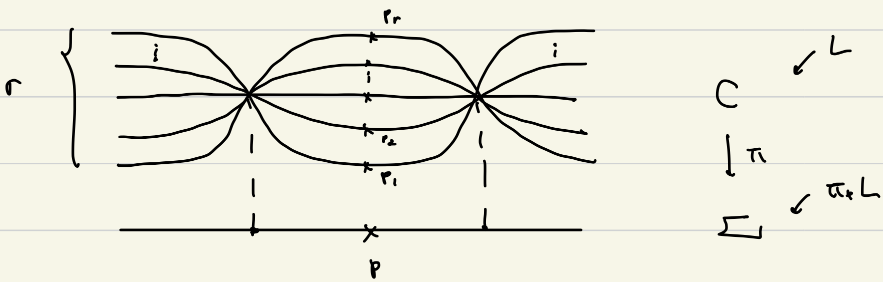
§1

Σ : コンパクトで非特異な代数曲線, $g(\Sigma)=g$
(リーマン面).



「ベクトル束のモジュライ空間」の導入として.
直線束の順像で表せる Σ 上のベクトル束を考える:

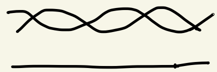
$$\pi : C \longrightarrow \Sigma \quad ; \quad \text{分岐}\ r\ \text{重被覆}$$



このとき. $L \in \mathrm{Pic}(C)$ (つまり C 上の直線束) は
Σ 上の rank r のベクトル束 $E = \pi_* L$ を定める.

($p \notin \{\text{分岐点}\}$ なら $E_p \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} L_{p_i}$, $\pi^{-1}(p) = \{p_1, \cdots, p_r\}$.)

[跳躍現象]



$$\begin{array}{ccc} C & \leftarrow & L \\ \downarrow \pi & & \\ \mathbb{P}^1 & \leftarrow & \pi_* L \end{array}$$

例)

$\pi : C \to \mathbb{P}^1$; 分岐2重被覆, $g(C) > 0$.

もし $\chi(L) = 0$ (つまり $\deg(L) = g-1$) なら

Riemann-Roch で $\deg(\pi_* L) = -2$.

このとき、$l := h^0(C, L) = h^0(\mathbb{P}^1, \pi_* L)$ とおくと、

$$\pi_* L \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(l-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-l-1).$$

$L \in \mathrm{Pic}^{g-1}(C)$ を連続的に変化させることを考える。

$\to$ $\pi_* L$ も連続的に変化する(はず).

$[L] \in \Theta \subset \mathrm{Pic}^{g-1}(C)$

$\Rightarrow h^0(C, L) = 1$ (or $h^1(C,L) = 1$)

ここで、$\mathrm{Pic}^{g-1}(C)$ のテータ因子を Θ として、

$$\begin{cases} L_t \notin \Theta & (t \neq 0) \\ L_0 \in \Theta & (t = 0) \end{cases}$$

となる1パラメータ族 $\{L_t\}$ を考える。

このとき、

$$\begin{cases} \pi_* L_t \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) & (t \neq 0) \\ \pi_* L_0 \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) & (t = 0) \end{cases}$$

このような状況を「跳躍現象」という。

Jumping phenomenon.

このような族も含めてベクトル束をパラメトライズするような
空間(モジュライ空間)を考えようとすると、都合の悪い空間ができる。

(ハウスドルフでない、無限次元など)

⇝「良い」幾何学的性質を持った空間を得るには、
ベクトル束を取捨選択しないといけない。

→ (半)安定ベクトル束だけ考える。

Def

E : Σ 上のベクトル束。

E に対し、slope $\mu(E)$ を

$$\mu(E) := \frac{\deg(E)}{\mathrm{rank}(E)}$$

で定める。また、すべての(非自明な)部分束

$0 \subsetneq F \subsetneq E$ に対して、

$$\mu(F) \underset{(=)}{<} \mu(E)$$

が成り立つとき、E は(半)安定である、という。

<u>Thm</u> (Mumford, Seshadri)

以下の性質をみたすような Σ 上のベクトル束のモジュライ空間
$\mathcal{U}^{s}_{\Sigma}(r,d) \subset \mathcal{U}^{ss}_{\Sigma}(r,d)$ が存在する.

(1) $\mathcal{U}^{s}_{\Sigma}(r,d)$ は滑らかな代数的多様体で、その各点は

rk $= r$, deg $= d$ の安定ベクトル束の同型類に対応する.

特に、$\mathcal{U}^{s}_{\Sigma}(r,d)$ は $\mathcal{U}^{ss}_{\Sigma}(r,d)$ の開集合.

(2) $\mathcal{U}^{ss}_{\Sigma}(r,d)$ は射影的代数的多様体で、その各点は

rk $= r$, deg $= d$ の半安定ベクトル束の同型類に対応する.

(3) $\mathcal{U}^{s}_{\Sigma}(r,d)$, $\mathcal{U}^{ss}_{\Sigma}(r,d)$ はともに粗モジュライ (Coarse moduli)

<u>Rem</u> (Moduli Problems / Moduli Functors)

次のような(反変)函手を考える.

$$
\begin{array}{cccc}
\mathcal{F}(-) : & \mathfrak{Sch}^{op} & \longrightarrow & \mathfrak{Set} \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & S & \longmapsto & \mathcal{F}(S)
\end{array}
$$

s.t. $\mathcal{F}(S) = \{$ S によってパラメトライズされる同値類の族 $\}$.

($\mathfrak{Sch}$: スキームのなす圏
$\mathfrak{Set}$: 集合のなす圏)

cf.

$$\begin{array}{ccccc} [E_1] & & [E_2] & \in & \mathcal{F}(S) \quad (= \text{vec. bdls}/\sim) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ s_1 & & s_2 & & S \quad (= \mathcal{U}_C^s(r,d)) \end{array}$$

このとき, $\mathcal{F}(-)$ を表現する組 (M, Φ) のことを $\mathcal{F}(-)$ の精密モジュライ (fine moduli) と言う.

$$\left(\begin{array}{l} \text{自然同値} \\ \Phi : \mathcal{F}(-) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(-, M) \end{array} \right)$$

また、次の条件をみたすスキーム M を $\mathcal{F}(-)$ の粗モジュライ (coarse moduli) という.

(i) 自然変換 $\Phi : \mathcal{F}(-) \longrightarrow \mathrm{Hom}(-, M)$ が存在.

(ii) $\Phi(\{point\}) : \mathcal{F}(\{pt\}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\{pt\}, M)$ が全単射.

(iii) Φ は次の普遍性をみたす:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(-) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi"'] & \mathrm{Hom}(-, M) \arrow[d, dashed, "\exists ! \Omega"] \\ & \mathrm{Hom}(-, N) \end{tikzcd}$$

変形理論から次の Lem が従う:

Lem

$g(\Sigma) \geq 2$ とする. $\mathcal{U}^{ss} := \mathcal{U}_\Sigma^{ss}(r,d)$, $\mathcal{U}^s := \mathcal{U}_\Sigma^s(r,d)$ とおく.

(1) $\dim \mathcal{U}^{ss} = 1 + r^2(g-1)$, $\mathcal{U}^s$ は $\mathcal{U}^{ss}$ の open dense subscheme

(2) 安定ベクトル束は単純 (simple)

(つまり $H^0(\Sigma, \mathrm{End}(E)) = \mathbb{C}$)

(3) 安定ベクトル束の同型類に対応する $\mathcal{U}^{ss}$ の点は非特異

(4) $T_{[E]}\mathcal{U}^s \simeq H^1(\Sigma, \mathrm{End}(E))$ $\updownarrow$ Serre duality

$T^*_{[E]}\mathcal{U}^s \simeq H^0(\Sigma, \mathrm{End}(E) \otimes \Omega^1_\Sigma)$

§2 Hitchin系 & スペクトル曲線

Def (ACIHS)

(M, ω) : 滑らかなシンプレクティック代数多様体.

B : 滑らかな代数多様体.

平坦射 $H : M \to B$ は, 次の条件をみたすとき,

代数的完全可積分系 (algebraically completely integrable Hamiltonian system) という:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "H"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & {}^{\exists}\widetilde{M} \arrow[dl, "\widetilde{H}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

: M のコンパクト化

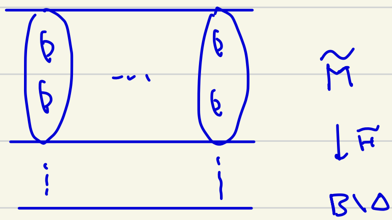
M のコンパクト化 $\widetilde{M}$ と平坦射 $\widetilde{H} : \widetilde{M} \to B$ が存在して、

上の図式が可換となり、

B のある固有な閉部分多様体 Δ の補集合 $B \setminus \Delta$ 上で、

$\widetilde{H}$ はファイバーがアーベル多様体に同型であるような

ラグランジュファイバー束である。 ≈ 複素トーラス



（注：Δ 上のファイバーは特異性を持つ）

Thm (Hitchin)

(ACIHS)

$T^*\mathcal{U}^s_\Sigma$ 上には自然に代数的完全可積分系の構造が入る。

この可積分系を Hitchin 可積分系 または Hitchin 系 という。

$T^*\mathcal{U}^s_\Sigma$ の全空間は次のような組 (E, φ) のなす空間：

(1) E は Σ 上の $\mathrm{rk}(E) = r$, $\deg(E) = d$ の安定ベクトル束。

(2) $\varphi \in H^1(\Sigma, \mathrm{End}(E))^* \simeq H^0(\Sigma, \mathrm{End}(E) \otimes \Omega^1_\Sigma)$

つまり 1-form に値を持つ E の自己準同型写像

$$\varphi : E \to E \otimes \Omega^1_\Sigma$$

このような組 (E, φ) を Higgs 束 という。

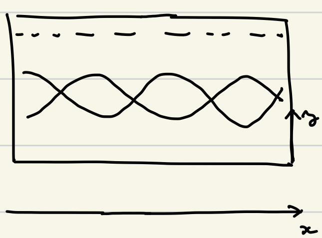
Hitchin系のハミルトニアン H は、次のように φ の特性多項式(固有多項式)の係数を対応させることで得られる.

$$H : T^*\mathcal{U}_\Sigma \longrightarrow B_\omega := \bigoplus_{i=1}^{r} H^0(\Sigma, \Omega_\Sigma^{\otimes i})$$
$$(E,\varphi) \longmapsto P := [(b_1, \dots, b_r)]$$

$$\begin{aligned} P(\varphi, y) &= \det(\varphi - y I_r) \\ &= y^r - \mathrm{tr}(\varphi) y^{r-1} + \cdots + (-1)^r \det(\varphi) \\ &= \sum_{i=0}^{r} b_i \cdot y^{r-i} \end{aligned}$$

$$b_i := (-1)^i \mathrm{tr}(\Lambda^i \varphi) \in H^0(\Sigma, \Omega_\Sigma^{\otimes i}), \quad b_0 = 1.$$

$$C := (P(\varphi, y) = 0) \subset \mathrm{Tot}(\Omega_\Sigma^1)$$ を考える.



$$\begin{array}{cl} C & \swarrow L \\ \downarrow \pi & \\ \Sigma & \swarrow \pi_* L \end{array} \qquad \subset \mathrm{Tot}(\Omega_\Sigma^1)$$

このような曲線 C ($\subset \mathrm{Tot}(\Omega_\Sigma^1)$) をスペクトル曲線(spectral curve)という.

($\pi : C \to \Sigma \ni x$ のファイバーは φ_x の固有値に対応 ($\varphi_x : E_x \to E_x \otimes \Omega_x^1$))

Prop (BNR Correspondence)

C を被約かつ既約で滑らかなスペクトル曲線とする。このとき

① $\{(E,\varphi)$ でスペクトル曲線が C のもの$\}/\simeq$

② $\{C$ 上の直線束 $L\}/\simeq$

の間には全単射が存在する。

($L_{(x,y)}$ は φ_x の固有ベクトルに対応する).

$$\begin{array}{ccc} H: T^*\mathcal{U}_\Sigma^s & \longrightarrow & \mathcal{B}_\omega \\ \cup & & \cup \\ H^{-1}(p) & \longrightarrow & \{p\} = \{[C]\} \end{array}$$

$$H^{-1}(p) \underset{\text{open}}{\subset} \mathrm{Pic}^\delta(C), \qquad \delta = d + r(1-g_\Sigma) + g_C - 1$$

$\mathrm{Pic}^\delta(C)$ " $\{L \mid C$ 上の $\deg(L)=\delta$ の直線束$\}/\sim$

ファイバーとして $\mathrm{Pic}^\delta(C)$ 全体を得るためには、安定性の定義を緩める必要がある。

Def

組 (E,φ) は、すべての φ-不変部分束 F に対して
（つまり $0 \subsetneq F \subsetneq E$ で $\varphi(F) \subset F \otimes \Omega^1_\Sigma$ な部分束に対して）

$$\mu(F) \underset{(<)}{\leq} \mu(E)$$

が成り立つとき、(半)安定 Higgs 束 という。

Thm (Hitchin, Simpson)

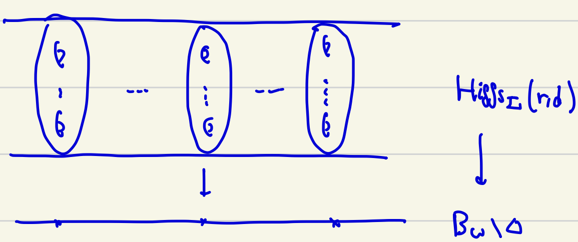
半安定 Higgs 束 の同型類をパラメトライズする粗モジュライ
$\mathrm{Higgs}_\Sigma(r,d)$ が存在する。

$$\begin{tikzcd}
T^*\mathcal{U}^s_\Sigma \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "H"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Higgs}_\Sigma(r,d) \arrow[dl, "\tilde{H}"] \\
& B_\omega &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Higgs}_\Sigma(r,d) \supset \tilde{H}^{-1}([\rho]) = \mathrm{Pic}^\delta(C)$

$B_\omega \supset \{[\rho]\} = \{[C]\}$

$\mathrm{Pic}^\delta(C) \simeq \mathrm{Pic}^0(C)$ は アーベル多様体 （複素トーラス） なので、



§3. 非可換ホッジ理論

上述の安定性の定義を考える意義(の一つ)として、次の定理たちが挙げられる:

Thm

次の2つのモジュライ空間の間には、(実解析的な)微分同相写像が存在する。

$$\mathrm{Higgs}_\Sigma(r,0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{(\text{semi-simple})}(\pi_1(\Sigma), GL_r(\mathbb{C}))/\sim_{GL_r(\mathbb{C})}$$

$A \sim B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists Q \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t. $B = QAQ^{-1}$

Thm (Riemann-Hilbert correspondence)

$\mathrm{Conn}_\Sigma(r)$: Σ 上の平坦接続のモジュライ空間.

$\nabla : E \to E \otimes \Omega^1_\Sigma$ s.t. $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$.

このとき、次の複素解析的な同型射が存在する。

$$\mathrm{Conn}_\Sigma(r) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{(s.s)}(\pi_1(\Sigma), GL_r(\mathbb{C}))/\sim$$

$$\begin{array}{ccc} \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (E, \nabla) & \longmapsto & (\text{monodromy}) \\ \left(E_\rho = (\tilde{\Sigma} \times \mathbb{C}^r)/\pi_1(\Sigma),\ \nabla_\rho\right) & \longleftarrow & \rho \end{array}$$

3つの重要なモジュライ空間が表れた

局所系 (local system)

- ① ベッチ・モジュライ空間 (Betti moduli) $\mathrm{Loc}_{\Sigma}(r) := \mathrm{Hom}^{(s.s)}(\pi_1(\Sigma), GL_r(\mathbb{C}))/\sim$
- ② ド・ラーム・モジュライ空間 (deRham moduli) $\mathrm{Conn}_{\Sigma}(r)$
- ③ ドルボー・モジュライ空間 (Dolbeault moduli) $\mathrm{Higgs}_{\Sigma}(r,0)$

上述の対応以外にも様々な対応が有る。(これらをまとめて非可換ホッジ理論という)

(小林-Hitchin対応, λ-接続, 調和束, ⋯).

何故「非可換ホッジ」理論と呼ばれているのか??? (※イメージ)

コンパクトケーラー多様体 X に対するホッジ理論

$$H^n_{dR}(X,\mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}_{Dol}(X)$$

$$\left(H^{p,q}_{Dol}(X) := H^q(X, \Omega^p_X) \right)$$

$n=1$ のとき. $H^1(X,\mathbb{C}) \simeq H^1(X,\mathcal{O}_X) \oplus H^0(X,\Omega^1_X)$

"局所系" "接続" "Higgs"

$$H^1(X,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}(H_1(X,\mathbb{Z}),\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1(X),\mathbb{C})$$

において, $\mathbb{C}$ を $GL_r(\mathbb{C})$ に置き換えると.

- ① $H^1(X,\mathbb{C}) \rightsquigarrow \check{H}^1(X, GL_r(\mathbb{C})) \leftrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(X), GL_r(\mathbb{C}))$ "局所系"
- ② $H^1(X,\mathcal{O}_X) \rightsquigarrow \check{H}^1(X, GL_r(\mathcal{O}_X))$ "正則ベクトル束"
- ③ $H^0(X,\Omega_X) \rightsquigarrow H^0(X, GL_r(\mathbb{C}) \otimes \Omega^1_X)$ "Higgs"

Rem

幾何学的ラングランズ対応は
3種類ある.

	Galois side		Automorphic side
			${}^L G$-束のモジュライ
de Rham ラングランズ	$\mathcal{D}_{qc}(\mathrm{Conn}_{\Sigma,G}(r))$	$\xrightarrow{?}$	$\mathcal{D}_{qc}(\mathrm{Bun}_{\Sigma,{}^L G}(r),\ D_{\mathrm{Bun}}\text{-mod})$
Dolbeault ラングランズ	$\mathcal{D}_{qc}(\mathcal{H}iggs_{\Sigma,G})$	$\xrightarrow{?}$	$\mathcal{D}_{qc}(\mathcal{H}iggs_{\Sigma,{}^L G})$
Betti ラングランズ	$\mathcal{D}_{qc}(\mathrm{Loc}_{\Sigma,G})$	$\xrightarrow{?}$	$\mathcal{D}(\mathrm{Sh}_N(\mathrm{Bun}_{\Sigma,{}^L G}(r)))$.
(Homological ミラー対称性	$\boxed{\text{B-branes}}$	$\xrightarrow{?}$	$\boxed{\text{A-branes}}$)