幾何学的ラングランズ対応について

セシル☆@sesiru8

1　概要

この PDF では, 主に [3] の第 2 章を参考にして幾何学的ラングランズ対応について解説する. 具体的には, Deligne による $G = GL_1$ の場合の幾何学的ラングランズ対応の証明を述べた後, Laumon と Rothstein によるフーリエ向井変換の観点からの研究について言及し, Beilinson と Drinfeld による所謂 “best hope” な定式化を行う. なお, ここではすべての議論を $\mathbb{C}$ 上で行う.

2　一般論

2.1　ラングランズ双対群

X をコンパクトリーマン面, G を複素簡約代数群とする.

まず G に対して, そのラングランズ双対群 ${}^LG$ を定義する. ${}^LG$ は以下の条件を満たすような複素簡約代数群である: $\mathfrak{g}, {}^L\mathfrak{g}$ をそれぞれ $G, {}^LG$ のリー代数とし, カルタン部分代数が $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}, {}^L\mathfrak{t} \subset {}^L\mathfrak{g}$ となるように極大トーラス $T \subset G, {}^LT \subset {}^LG$ を取り固定する ($\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$). $\mathbf{root}_{\mathfrak{g}} \subset \mathbf{weight}_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{t}^{\vee}$ を $\mathfrak{g}$ のルート系に対応するルート, ウェイト格子とする. また, $\mathbf{char}_G = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^{\times})$ とおく. さて

$$\mathbf{root}_{\mathfrak{g}} \subset \mathbf{char}_G \subset \mathbf{weight}_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{t}^{\vee}$$

に対して, それらの双対を

$$\mathbf{coroot}_{\mathfrak{g}} \subset \mathbf{cochar}_G \subset \mathbf{coweight}_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{t}$$

とし, G のルートデータ $(\mathbf{weight}_{\mathfrak{g}}, \mathbf{coweight}_{\mathfrak{g}}, \mathbf{root}_{\mathfrak{g}}, \mathbf{coroot}_{\mathfrak{g}})$ を定義する. このとき, ラングランズ双対群 ${}^LG$ は, そのルートデータ

$$(\mathbf{weight}_{[{}^L\mathfrak{g}]}, \mathbf{coweight}_{[{}^L\mathfrak{g}]}, \mathbf{root}_{[{}^L\mathfrak{g}]}, \mathbf{coroot}_{[{}^L\mathfrak{g}]})$$

が

$$(\mathbf{coweight}_{\mathfrak{g}}, \mathbf{weight}_{\mathfrak{g}}, \mathbf{coroot}_{\mathfrak{g}}, \mathbf{root}_{\mathfrak{g}})$$

と一致するものとして与えられる. つまり

$$\mathbf{root}_{[{}^L\mathfrak{g}]} \subset \mathbf{char}_{[{}^L G]} \subset \mathbf{weight}_{[{}^L\mathfrak{g}]} \subset {}^L\mathfrak{t}^\vee$$

がそれぞれ $\mathbf{coroot}_{\mathfrak{g}} = \mathbf{root}_{[{}^L\mathfrak{g}]}, \mathbf{cochar}_G = \mathbf{char}_{[{}^L G]}, \mathbf{coweight}_{\mathfrak{g}} = \mathbf{weight}_{[{}^L\mathfrak{g}]}, \mathfrak{t} = {}^L\mathfrak{t}^\vee$ を満たすようなものである.

ラングランズ双対群の例を挙げる:

G	${}^L G$
GL_n	GL_n
SL_n	PGL_n
Sp_n	SO_{2n+1}
$Spin_{2n}$	$SO_{2n}/\mathbb{Z}_2$
E_8	E_8

2.2 Hecke 保型層

$\mathcal{B}un_G$ を X 上の主 G-束のモジュライスタックとし, $\mathcal{H}ecke$ を次の 4 つ組 (V, V', x, β) のモジュライスタックとする:

(1) V, V' は X 上の主 G-束,

(2) $x \in X$,

(3) $\beta : V|_{X\setminus\{x\}} \xrightarrow{\sim} V'|_{X\setminus\{x\}}$.

このとき, 次の自然な射影がある:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H}ecke \arrow[dl, "h^{\leftarrow}"'] \arrow[dr, "h^{\rightarrow}"] & \\ \mathcal{B}un_G & & X \times \mathcal{B}un_G \end{tikzcd}$$

ここで, $h^{\leftarrow}(V, V', x, \beta) = V,\ h^{\rightarrow}(V, V', x, \beta) = (x, V')$ とする.

このとき $\mathcal{H}ecke$ には, 支配的な余指標 $\mu \in \mathbf{cochar}_G^+$ に対応した階層構造 $\mathcal{H}ecke^\mu \subset \mathcal{H}ecke$ が定まる: $\mathcal{H}ecke^\mu$ とは, $(V, V', x, \beta) \in \mathcal{H}ecke$ について $\lambda \in \mathbf{char}_G^+$ が支配的な指標であって, ρ^λ が最高ウェイトとして λ を持つような G の既約表現であるとき, β が局

所自由層の埋め込み

$$\rho^{\lambda}(\beta) : \rho^{\lambda}(V) \hookrightarrow \rho^{\lambda}(V') \otimes \mathcal{O}_X(\langle \mu, \lambda \rangle x)$$

を誘導するような $\mathcal{H}ecke$ の閉部分スタックである.

また Goresky-MacPherson middle perversity extension IC_{μ} を, モジュライスタック $\mathcal{H}ecke$ の滑らかな部分スタック

$$j : (\mathcal{H}ecke^{\mu})^{\mathrm{smooth}} \hookrightarrow \mathcal{H}ecke^{\mu}$$

上の自明で階数が 1 の局所系 $j_{!*}(\mathbb{C}[\dim \mathcal{H}ecke^{\mu}])$ として定義する.

これらの準備の下 Hecke 作用素 H^{μ} を, $\mathcal{B}un_G$ 上の D-加群のなす導来圏から $X \times \mathcal{B}un_G$ 上の D-加群のなす導来圏の間に定まる関手として次のように定義する:

$$H^{\mu} : \mathcal{D}(\mathcal{B}un_G, D) \to \mathcal{D}(X \times \mathcal{B}un_G, D) \ ; \ \mathcal{F} \mapsto h_!^{\rightarrow}(h^{\leftarrow *}(\mathcal{F}) \otimes \mathrm{IC}^{\mu}).$$

E を X 上の ${}^LG$-局所系とする. このとき, 各 $\mu \in \mathbf{char}^+_{[{}^LG]}$ に対応する ${}^LG$ の既約表現 ρ^{μ} に対して, 局所系 $\rho^{\mu}(E) := E \times_{{}^LG} \rho^{\mu}$ を得る.

定義 2.1. E を X 上の ${}^LG$-局所系とする. このとき $\mathcal{B}un_G$ 上の D-加群 $\mathcal{F}$ は

$$H^{\mu}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \boxtimes \rho^{\mu}(E), \ \mu \in \mathbf{char}^+_{[{}^LG]}$$

を満たすとき, Hecke 作用による固有値が E となる **Hecke 保型層**であるという.

$\mathbb{C}$ 上の幾何学的ラングランズ対応は次のように述べられる.

予想 2.2. E を X 上の既約な ${}^LG$-局所系とする. このとき $\mathcal{B}un_G$ 上には, Hecke 作用素による固有値が E となる零でない Hecke 保型層 Aut_E が存在し, Aut_E を $\mathcal{B}un_G$ の各連結成分上に制限したものは既約な D-加群になっている.

3 GL_1 の場合の幾何学的ラングランズ対応の証明

ここでは X を種数 $g := g(X)$ が $g > 0$ を満たすコンパクトリーマン面とする.

$G = GL_1 \cong {}^LG$ の場合, モジュライスタック $\mathcal{B}un_{GL_1}$ は X のピカール多様体 $\mathrm{Pic}(X)$ である. $\mathrm{Pic}(X)$ は対応する直線束の次数が d となるような集合 $\mathrm{Pic}^d(X)$ を持つ. 次数が 0 の直線束に対応する集合 $\mathrm{Pic}^0(X)$ はヤコビ多様体 $\mathrm{Jac}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbb{Z})$ である. これは $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}(X) = g$ を満たす複素トーラスである. この場合の幾何学的ラングランズ対応は次のようになる.

定理 3.1. X 上の階数が 1 の局所系 E に対して, 次の Hecke 保型層の条件を満たすような $\mathrm{Pic}(X)$ 上の D-加群 Aut_E が存在する:

$$(h^{\leftarrow})^*(\mathrm{Aut}_E) \cong E \boxtimes \mathrm{Aut}_E\,. \tag{3.0.1}$$

ここで $h^{\leftarrow} : X \times \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X)\ ;\ (x, \mathcal{L}) \mapsto \mathcal{L}(x)$ とする.

証明. (3.0.1) を満たすような Aut_E を構成するために, アーベルヤコビ写像

$$\pi_d : S^d X \to \mathrm{Pic}^d(X)\ ;\ D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$$

を考える (D は X 上の因子である). $d > 2g-2$ のとき π_d は射影空間束であり, $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^d(X)$ におけるファイバー $\pi_d^{-1}(\mathcal{L}) = \mathbb{P}H^0(X, \mathcal{L})$ は $d-g$ 次元の射影空間である.

さて $\bigcup_{d>2g-2} S^d X$ 上に, Hecke 保型層の条件の類似

$$(\tilde{h}^{\leftarrow})^*(E^{(d+1)}) \cong E \boxtimes E^{(d)} \tag{3.0.2}$$

を満たすような局所系 $E^{(d)}$ を構成する. ここで $\tilde{h}^{\leftarrow} : S^d X \times X \to S^{d+1} X\ ;\ (D, x) \mapsto D + [x]$ とする.

$$\mathrm{Sym}^d : X \times \cdots \times X \to S^d X := \mathrm{Sym}^d X$$

を用いて

$$E^{(d)} := (\mathrm{Sym}^d_*(E^{\boxtimes d}))^{\mathfrak{S}_d}$$

とおく. これは $S^d X, d > 2g-2$ 上の階数が 1 の局所系であって, (3.0.2) を満たすものである. この局所系 $E^{(d)}$ がアーベルヤコビ写像 π_d により $\mathrm{Pic}^d(X), d > 2g-2$ 上のある局所定数層を定めること示す. つまり $E^{(d)}$ を π_d の各ファイバー上に制限したものが定数層になることを示す. まず $E^{(d)}$ は局所系なので, 各ファイバー上に制限したものは局所定数層になっている. ここで π_d は射影空間束なので, 各ファイバーは単連結である. ゆえに, 各ファイバー上の局所定数層は定数層となる. これにより, $\mathrm{Pic}^d(X)$ 上に $E^{(d)} = \pi_d^*(\mathrm{Aut}_E^d)$ を満たすような局所定数層 Aut_E^d が構成できる. (3.0.2) により, Aut_E^d は $\bigcup_{d>2g-2} \mathrm{Pic}^d(X)$ 上の Hecke 保型層をなす.

次に, Hecke 保型層の条件 (3.0.1) を用いて帰納的に, 残りの成分 $\mathrm{Pic}^d(X), d \leq 2g-2$ 上までこの局所定数層を延長する. まず, 任意の $x \in X$ と任意の $d > 2g-1$ に対して, 同型 $\mathrm{Aut}_E^d \cong E_x^* \otimes (h_x^{\leftarrow})^*(\mathrm{Aut}_E^{d+1})$ がある. ここで, $h_x^{\leftarrow} : \mathrm{Pic}^d(X) \to \mathrm{Pic}^{d+1}(X)\ ;\ \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}(x)$ とする. これにより帰納的に, 任意の N 点の組 $(x_i), i = 1, \ldots, N$ と任意の $d > 2g-2+N$ に対して, 同型

$$\mathrm{Aut}_E^d \cong \bigotimes_{i=1}^{N} E_{x_i}^* \otimes (h_{x_1}^{\leftarrow *} \circ \cdots \circ h_{x_N}^{\leftarrow *}(\mathrm{Aut}_E^{d+N})) \tag{3.0.3}$$

が得られ, 特にこの同型は任意の 2 つの N 点の組 $(x_i),(y_i)$ について推移的である. つまり任意の $d>2g-2$ に対して

$$\bigotimes_{i=1}^{N} E^*_{x_i}\otimes(h^{\leftarrow *}_{x_1}\circ\cdots\circ h^{\leftarrow *}_{x_N}(\mathrm{Aut}^{d+N}_E))\cong\bigotimes_{i=1}^{N} E^*_{y_i}\otimes(h^{\leftarrow *}_{y_1}\circ\cdots\circ h^{\leftarrow *}_{y_N}(\mathrm{Aut}^{d+N}_E)) \quad (3.0.4)$$

が成り立つ. ゆえに任意の N 点の組 $(x_i), i=1,\dots,N$ を用いることで (3.0.3) の右辺によって $d=2g-1-N$ なる $\mathrm{Pic}^d(X)$ 上に Aut^d_E を構成できた. さらにこの Aut^d_E は点の選び方に依らない: 点 $x_0\in X$ を取り, $d=2g-1$ の (3.0.4) を表すと

$$\mathrm{Aut}^{2g-1}_E=(E^*_{x_0})^{\otimes N}\otimes(h^{\leftarrow *}_{x_0}\circ\cdots\circ h^{\leftarrow *}_{x_0}(\mathrm{Aut}^{2g-1+N}_E))$$

となる. このとき $d=2g-1-N$ についての (3.0.4) を構成する. これは (3.0.4) において $d=2g-1$ としたものであるが, Aut^{2g-1}_E に対して $h^{\leftarrow *}_{x_0}$ を N 回作用させ, さらに $E^*_{x_0}$ を N 回テンソルすることにより得られる. 同様に, $d>2g-2$ の場合の Aut^d_E に関する Hecke 保型層の条件を用いることにより, $d=2g-1-N$ なる $\mathrm{Pic}^d(X)$ 上の Aut^d_E が Hecke 保型層の条件 (3.0.1) を満たすことが示せる.

以上から $\mathrm{Pic}(X)$ 全体の上に Hecke 保型層の条件を満たす D-加群 Aut_E が構成できた. □

4 フーリエ向井変換との関係性について

4.1 Laumon-Rothstein のフーリエ向井変換

$\mathrm{Loc}_1:=\mathrm{Loc}_{GL_1}$ を X 上の階数が 1 の局所系のモジュライ空間とする. 局所系は組 (E,∇) であって, E は X 上の正則直線束, ∇ は E 上の正則接続となるものである. つまり, $\nabla: E\to E\otimes\Omega^1_X$ は次を満たす層の写像である.

$$\nabla(fs)=s\otimes\partial(f)+f\nabla(s),\ f\in\mathcal{O}_X, s\in E.$$

さて, E には正則接続 ∇ が付随しているので, E の第 1 チャーン類 $c_1(E)$ は消える. $c_1(E)$ は E の次数であるから, E は $\mathrm{Pic}^0(X)=\mathrm{Jac}(X)$ 上の点を定める. これにより, 忘却写像

$$\mathrm{Bun}:\mathrm{Loc}_1\to\mathrm{Jac}(X)\ ;\ (E,\nabla)\mapsto E$$

が得られた. この写像のファイバー $\mathrm{Bun}^{-1}(E)$ を考察する.

$\mathrm{Bun}^{-1}(E)$ は E 上に定まる正則接続のなす空間である. 局所的に正則接続 ∇_0 を 1 つ取り固定したとき, その他の任意の正則接続 ∇ は X 上の正則 1 形式 ω を用いて $\nabla = \nabla_0 + \omega$ と表される. 任意の正則直線束 E には正則接続が付随するので,

$$\mathrm{Bun}^{-1}(E) = \nabla_0 + H^0(X, \Omega_X^1)$$

と表され, これは g 次元のアフィン空間である. $E \in \mathrm{Jac}(X)$ を動かすことで

$$\mathrm{Bun} : \mathrm{Loc}_1 \to \mathrm{Jac}(X)$$

はファイバーが $H^0(X, \Omega_X^1)$ であるアフィン $\mathbb{A}^g$-束であることが分かる. このベクトル束は $\mathrm{Jac}(X)$ の余接束 $T^* \mathrm{Jac}(X)$ と自然に同一視される. 実際, $\mathrm{Jac}(X)$ の E に対応する点における接空間は E の無限小変形の空間であり, 小平-スペンサーの変形理論により $H^1(X, \mathrm{End}(E)) = H^1(X, \mathcal{O}_X)$ と同型である. セールの双対性定理により, $H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong H^0(X, \Omega_X^1)^*$ なので, Loc_1 は $\mathrm{Jac}(X)$ 上のねじれ余接束と呼ばれるものになっている.

さて, 正則接続が付随した X 上の正則直線束は, 平坦な正則接続が付随した $\mathrm{Jac}(X)$ 上の正則直線束と同一視される. 実際, X 上に階数が 1 の局所系 E を定めることは準同型写像 $\pi_1(X, x_0) \to \mathbb{C}^\times$ を定めることと同値である. ここで $\mathbb{C}^\times$ が可換であることから, この準同型写像は $\pi_1(X, x_0)$ をその交換子部分群で割ったものを経由する. これは $H_1(X, \mathbb{Z})$ と同型である. $H_1(X, \mathbb{Z})$ 上のカップ積がユニモジュラーな双線形形式であることから, $H_1(X, \mathbb{Z})$ は $H^1(X, \mathbb{Z})$ と同一視される. $\mathrm{Jac}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}^g/H^1(X, \mathbb{Z})$ により, $H^1(X, \mathbb{Z})$ は $\pi_1(\mathrm{Jac}(X))$ と同型である. これにより, 元の準同型写像 $\pi_1(X, x_0) \to \mathbb{C}^\times$ から $\pi_1(\mathrm{Jac}(X)) \to \mathbb{C}^\times$ が得られた. つまり, $\mathrm{Jac}(X)$ 上の局所系 $E_{\mathrm{Jac}(X)}$ が得られたことになる. 実はこの $E_{\mathrm{Jac}(X)}$ は Aut_E^0 と同一視することができる. これにより, 対応 $E = (E, \nabla) \mapsto \mathrm{Aut}_E^0$ を構成することができた. ゆえに Loc_1 は, $\mathrm{Jac}(X)$ 上の正則直線ベクトル束 $\widetilde{\mathcal{L}}$ と, $\widetilde{\mathcal{L}}$ 上の平坦な正則接続 $\widetilde{\nabla}$ の組 $(\widetilde{\mathcal{L}}, \widetilde{\nabla})$ のモジュライ空間と見なせる.

$\mathrm{Loc}_1 \times \mathrm{Jac}(X)$ を考え. $\mathcal{P}$ を $\mathrm{Loc}_1 \times \mathrm{Jac}(X)$ 上の普遍平坦正則直線ベクトル束とする. つまり $(\widetilde{\mathcal{L}}, \widetilde{\nabla}) \times \mathrm{Jac}(X)$ への制限が接続 $(\widetilde{\mathcal{L}}, \widetilde{\nabla})$ を持つ正則直線ベクトル束となるものとする. この $\mathcal{P}$ をフーリエ向井変換におけるフーリエ向井核 (ポアンカレ束) とするような圏の間の対応を考える.

ここで, Laumon-Rothstein によるフーリエ向井変換の応用を準備しておく. A をアーベル多様体としたとき, $A^\natural$ により A 上の平坦直線束のモジュライ空間を表す.

定理 4.1 ([5] 定理 4.5)**.** A をアーベル多様体, $\hat{A}$ をその双対アーベル多様体とする．このとき, $\mathcal{O}_{A^\natural}$-加群の有界導来圏と $D_{\hat{A}}$-加群の有界導来圏の間の導来関手

$$\Phi_{A^\natural \to \hat{A}} : \mathcal{D}^b_{qc}(A^\natural) \to \mathcal{D}^b(\hat{A}, D_{\hat{A}})$$
$$\Phi_{\hat{A} \to A^\natural} : \mathcal{D}^b(\hat{A}, D_{\hat{A}}) \to \mathcal{D}^b_{qc}(A^\natural)$$

が存在し,

$$\Phi_{A^\natural \to \hat{A}} \circ \Phi_{\hat{A} \to A^\natural} = \Phi_{\hat{A} \to A^\natural} \circ \Phi_{A^\natural \to \hat{A}} = [-\dim A]$$

を満たす.

□

さて, $A = \mathrm{Jac}(X)$ とすると, $\hat{A} \cong \mathrm{Jac}(X), A^\natural \cong \mathrm{Loc}_1$ となるので, 定理 4.1 を用いて次が示される.

定理 4.2. 導来関手

$$\Phi^{\mathcal{P}}_{\mathrm{Loc}_1 \to \mathrm{Jac}(X)} : \mathcal{D}^b_{qc}(\mathrm{Loc}_1) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{Jac}(X), D_{\mathrm{Jac}(X)})$$
$$\Phi^{\mathcal{P}}_{\mathrm{Jac}(X) \to \mathrm{Loc}_1} : \mathcal{D}^b_{qc}(\mathrm{Jac}(X), D_{\mathrm{Jac}(X)}) \to \mathcal{D}^b_{qc}(\mathrm{Loc}_1)$$

が存在し,

$$\Phi^{\mathcal{P}}_{\mathrm{Loc}_1 \to \mathrm{Jac}(X)} \circ \Phi^{\mathcal{P}}_{\mathrm{Jac}(X) \to \mathrm{Loc}_1} = \Phi^{\mathcal{P}}_{\mathrm{Jac}(X) \to \mathrm{Loc}_1} \circ \Phi^{\mathcal{P}}_{\mathrm{Loc}_1 \to \mathrm{Jac}(X)} = [-g]$$

を満たす.

□

4.2 Hecke 保型層の条件

$\mathcal{D}_{\mathrm{Jac}(X)}$ を $\mathrm{Jac}(X)$ 上の微分作用素のなす層とし, $\mathrm{Jac}(X)$ 上の大域的な微分作用素のなす代数 $D_{\mathrm{Jac}(X)} := \Gamma(\mathrm{Jac}(X), \mathcal{D}_{\mathrm{Jac}(X)})$ を考える．$\mathrm{Jac}(X)$ の接束は自明であり, そのファイバーは $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ と同型なので, $D_{\mathrm{Jac}(X)}$ は可換な代数である．また, セールの双対性定理により $\mathrm{Sym}\, H^1(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Fun}(H^0(X, \Omega^1_X))$ と同型である (ここで, $\mathrm{Fun}(V)$ によりアフィン代数多様体 V 上の多項式関数のなす代数を表すことにする)．よって, 各点 $\omega \in H^0(X, \Omega^1_X)$ は準同型写像 $\lambda_\omega : D_{\mathrm{Jac}(X)} \to \mathbb{C}$ を誘導する.

$\mathrm{Jac}(X)$ 上の $\mathcal{D}_{\mathrm{Jac}(X)}$-加群 $\mathrm{Aut}^0_{E_\omega}$ を

$$\mathrm{Aut}^0_{E_\omega} := \mathcal{D}_{\mathrm{Jac}(X)} / \ker \lambda_\omega$$

により定義する．これは Hecke 保型層 Aut_E を, 接続 $d+\omega$ が付随した X 上の次数が 0 の直線ベクトル束に対応する部分に制限したものである．この $\mathcal{D}_{\mathrm{Jac}(X)}$-加群 $\mathrm{Aut}^0_{E_\omega}$ は微分方程式系

$$D \cdot f = \lambda_\omega(D) f,\ D \in D_{\mathrm{Jac}(X)} \tag{4.2.1}$$

に対応し, 他の $\mathcal{D}_{\mathrm{Jac}(X)}$-加群 $\mathcal{K}$ への準同型写像 $\mathrm{Aut}^0_{E_\omega} \to \mathcal{K}$ による $1 \in \mathrm{Aut}^0_{E_\omega}$ の像 f_0 は (4.2.1) の解となる．

E_0 を X 上の次数が 0 の直線ベクトル束, M を $\mathrm{Bun}^{-1}(E_0)$ 上の $\mathcal{O}_{\mathrm{Loc}_1}$-加群 (つまり $\mathrm{Fun}(H^0(X,\Omega^1_X))$-加群), $i : \mathrm{Bun}^{-1}(E_0) \hookrightarrow \mathrm{Loc}_1$ として $\mathcal{M} := i_*(M)$ と定義する．このとき, 導来関手 $\Phi^{\mathcal{P}}_{\mathrm{Loc}_1 \to \mathrm{Jac}(X)}$ を部分圏 $\mathcal{M}$ 上に制限したものは

$$M \mapsto \Phi^{\mathcal{P}}_{\mathrm{Loc}_1 \to \mathrm{Jac}(X)}|_{\mathcal{M}}(M) = \mathcal{D}_{\mathrm{Jac}(X)} \otimes_{D_{\mathrm{Jac}(X)}} M$$

を満たすような $\mathrm{Fun}(H^0(X,\Omega^1_X))$-加群の圏と $\mathrm{Jac}(X)$ 上の $\mathcal{D}$-加群の導来圏の間の関手と見なせる．ここで $\mathrm{Fun}(H^0(X,\Omega^1_X)) \cong D_{\mathrm{Jac}(X)}$ を用いた．特に M として λ_ω に対応する加群 $\mathcal{O}_{E_\omega}$ を取ることで, $\Phi^{\mathcal{P}}_{\mathrm{Loc}_1 \to \mathrm{Jac}(X)}|_{\mathcal{M}}(\mathcal{O}_{E_\omega}) = \mathrm{Aut}^0_{E_\omega}$ となる．これにより, $H^0(X,\Omega^1_X) \subset \mathrm{Loc}_1$ に台を持つ $\mathcal{D}^b_{qc}(\mathrm{Loc}_1)$ の部分圏において, フーリエ向井変換と Hecke 保型層との関係が得られた．つまり GL_1 の場合には, 幾何学的ラングランズ対応をフーリエ向井変換として見ることにより, より多くの情報が得られていることが分かる．

5　フーリエ向井変換としての幾何学的ラングランズ対応

$\mathcal{L}oc_G$ を, X 上の G-局所系 $E := (E, \nabla)$ のモジュライスタックとする．

Beilinson と Drinfeld は [2] において, 幾何学的ラングランズ対応を非可換フーリエ向井変換として定式化した．

予想 5.1. $\mathcal{B}un^\circ_G$ を $\mathcal{B}un_G$ の連結成分とする．このとき, $\mathcal{L}oc_{{}^LG}$ 上の $\mathcal{O}$-加群の導来圏と $\mathcal{B}un^\circ_G$ 上の D-加群の導来圏の間の圏同値

$$\mathfrak{c} : \mathcal{D}_{qc}(\mathcal{L}oc_{{}^LG}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(\mathcal{B}un^\circ_G, D)$$

が存在し, $E \in \mathcal{L}oc_{{}^LG}$ 上の摩天楼層 $\mathcal{O}_E$ の $\mathfrak{c}$ による像は, Hecke 保型層の条件

$$H^\mu(\mathfrak{c}(\mathcal{O}_E)) = \mathfrak{c}(\mathcal{O}_E) \boxtimes \rho^\mu(E)$$

を満たす．

しかし, この予想は一般には成立しないことが指摘されている. 例えば, $G = SL_2, X = \mathbb{P}^1$ のときに成り立たない ([4]). これは $\mathcal{L}oc_{{}^L G}$ の構造の複雑さに起因している.

このことから Arinkin と Gaitsgory は [1] において, 左辺をより適切な圏に取り換えることを試みている.

参考文献

[1] D. Arinkin and D. Gaitsgory. Singular support of coherent sheaves and the geometric langlands conjecture. *Selecta Mathematica*, Vol. 21, No. 1, pp. 1–199, 2015.

[2] A. Beilinson and V. Drinfeld. Quantization of hitchin's integrable system and hecke eigensheaves, 1991.

[3] E. Frenkel. Lectures on the langlands program and conformal field theory. In *Frontiers in number theory, physics, and geometry II*, pp. 387–533. Springer, 2007.

[4] V. Lafforgue. Quelques calculs reliésa la correspondance de langlands géométrique pour p1 (version provisoire). Available at author's websi te: http://www. math. jussieu. fr/˜ vlafforg, 2009.

[5] M. Rothstein. Sheaves with connection on abelian varieties. *Duke Math. J.*, Vol. 84, No. 3, pp. 565–598, 1996.